Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €

POZIV ZA MEĐUOPŠTINSKA TAKMIČENJA... str. 9

BROJ 31 - GODINA 2026.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 31**

Godina 2026. Cijena: 1,50 €

Priprema za štampu: *Branko Gazdić*

Tiraž: *1000*

Štampa: *„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Sadržaj

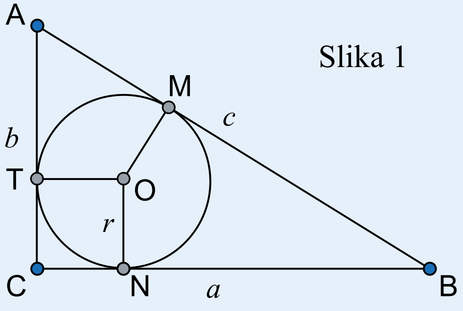
Radomir Božović

NEKOLIKO JEDNAKOSTI I NEJEDNAKOSTI O POLUPREČNIKU KRUŽNICE UPISANE U PRAVOUGLI TROUGAO

Znamo da se u svaki trougao može upisati kružnica. Centar te kružnice je presjek simetrala unutrašnjih uglova, a poluprečnik je odsječak normale od centra upisane kružnice do bilo koje stranice. U ovom prilogu ćemo dati nekoliko zanimljivih jednakosti i nejednakosti koje povezuju poluprečnik upisane kružnice kod pravouglog trougla sa ostalim elementima tog trougla. U svim narednim zadacima posmatraćemo pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod tjemena C. Katete ćemo označiti sa a i b, a hipotenuzu sa c. Poluprečnik kružnice upisane u taj trougao označićemo sa r.

Zadatak 1. Dokazati da u svakom pravouglom trouglu važi: $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao ABC (Slika 1). Sa O označavamo centar upisane kružnice, a sa M, N i T tačke u kojima ta kružnica redom dodiruje stranice c, a i b.



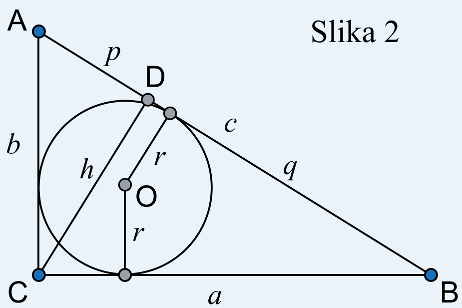
Slika 1

Kako su ON i OT normalne duži na stranicama CB i CA, četvorougao CNOT je kvadrat sa stranicom r (poluprečnik upisane kružnice). Sada je AM = AT i BM = BN (jednakost tangentnih duži, što se lako može dokazati primjenom podudarnosti na trouglove AMO i ATO), pa je:

$a + b = AT + r + BN + r = AM + BM + 2r = c + 2r$, a odavde lako dobijamo da je: $2r = a + b - c$, odnosno $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Zadatak 2: Neka je CD = h visina koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla ABC i r, r_1, r_2 poluprečnici kružnica upisanih redom u trouglove ABC, ADC i CDB. Tada važi: $r + r_1 + r_2 = h$.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao ABC sa upisanom kružnicom poluprečnika r. Neka je D podnožje visine iz tjemena C koja odgovara hipotenuzi. Označimo AD = p i BD = q (Slika 2).



Slika 2

Za trouglove ABC, ADC i CDB, prema prethodnom zadatku, važi:

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad r_1 = \frac{p+h-b}{2},$$

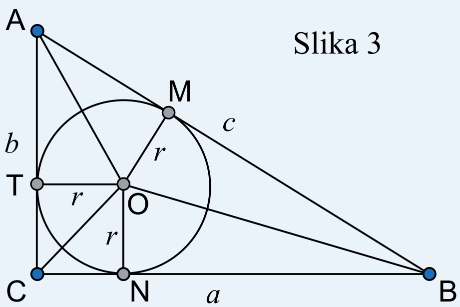
$$r_2 = \frac{q+h-a}{2}.$$

Sabiranjem ovih jednakosti, a imajući u vidu da je $c = p + q$, lako se dobija da je:

$r + r_1 + r_2 = h$, što je trebalo dokazati.

Zadatak 3. Dokazati da u pravouglom trouglu ABC važi: $P = \frac{r \cdot S}{2}$, odnosno, $r = \frac{2 \cdot P}{S}$, pri čemu sa P označavamo površinu, a sa S obim tog trougla.

Rješenje: Posmatrajmo pravougli trougao ABC, sa poluprečnikom upisane kružnice r (Slika 3).



Slika 3

Površina trougla ABC može se zapisati kao zbir površina trouglova BOC, AOC i BOA, pa je:

$$P = P_{\Delta BOC} + P_{\Delta AOC} + P_{\Delta BOA}$$

$$= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot r}{2} = \frac{S \cdot r}{2},$$ a odavde se dobija tražena formula: $r = \frac{2 \cdot P}{S}$.

Inače, dobijena formula važi za bilo koji trougao, što se dokazuje na potpuno isti način.

Zadatak 4. U pravouglom trouglu ABC važi: $r < \frac{h}{2}$.

Rješenje: Označimo sa r poluprečnik kružnice upisane u pravougli trougao, a sa h visinu koja odgovara hipotenuzi. Koristeći formulu iz prethodnog zadatka $P = \frac{r \cdot S}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$, formulu za površinu trougla $P = \frac{c \cdot h}{2}$ i nejednakost trougla $a + b > c$, dobijamo: $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2} > \frac{r \cdot 2 \cdot c}{2}$,

pa je: $r \cdot c < \frac{c \cdot h}{2}$, odnosno $r < \frac{h}{2}$.

Zadatak 5. Površina pravouglog trougla se može izračunati po formuli: $P = r \cdot (c + r)$. Dokazati.

Rješenje: Koristićemo formulu iz zadatka 1: $r = \frac{a+b-c}{2}$. Sada imamo:

$r \cdot (c + r) = \frac{a+b-c}{2} \cdot (c + \frac{a+b-c}{2}) = \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} = \frac{((a+b)-c)\cdot((a+b)+c)}{4} = \frac{(a+b)^2-c^2}{4} = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = P$, što je trebalo dokazati.

Pravougli trougao kome su dužine stranica prirodni brojevi naziva se Pitagorin trougao. Trougao sa stranicama 3, 4 i 5 je Pitagorin, takav je i trougao sa stranicama 5, 12 i 13. Dužine stranica pravouglog trougla čine Pitagorinu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) ako važi $a^2 + b^2 = c^2$.

Zadatak 6. Dokazati da je poluprečnik kružnice upisan u Pitagorin trougao prirodan broj.

Rješenje: Neka je dat Pitagorin trougao sa stranicama a, b, c. Kako imamo formulu $r = \frac{a+b-c}{2}$, dovoljno je dokazati da je broj $(a + b - c)$ paran.

Kako je: $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = c^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) = 2(c^2 + ab - ac - bc)$, zaključujemo da je paran i broj $(a + b - c)^2$, pa je paran i $(a + b - c)$, što znači da je r prirodan broj.

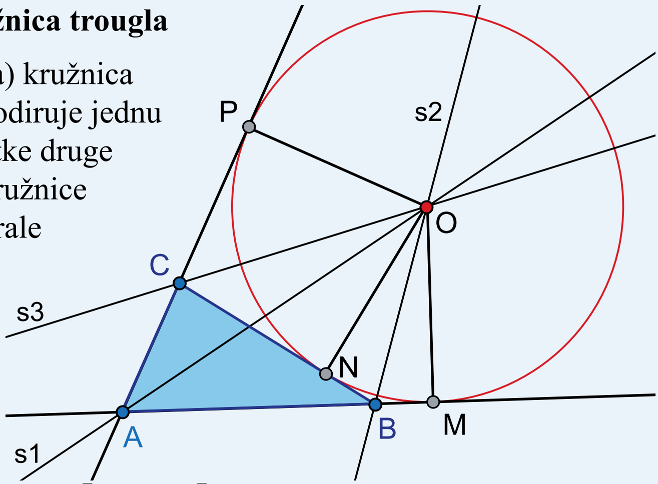
Zadatak 7: Dokazati da za svaki prirodan broj n, postoji Pitagorin trougao čiji poluprečnik upisane kružnice ima dužinu n.

Rješenje: Trojka (3, 4, 5) je Pitagorina trojka brojeva. Lako se dokazuje da je za svaki prirodan broj n trojka brojeva ($3n$, $4n$, $5n$) takođe Pitagorina trojka brojeva. Posmatrajmo pravougli trougao sa stranicama $a = 3n$, $b = 4n$ i $c = 5n$, ($n \in$ N).

Tada važi: $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3n+4n-5n}{2} = \frac{2n}{2} = n$, što je trebalo dokazati.

Dodatak: Pripisana kružnica trougla

Pripisana (spolja pripisana) kružnica trougla je kružnica koja dodiruje jednu stranicu trougla i produžetke druge dvije stranice. Centar te kružnice se nalazi u presjeku simetrale jednog unutrašnjeg ugla i simetrala spoljašnjih uglova kod druga dva tjemena, a poluprečnik je rastojanje centra od stranice koju dodiruje.



Radomir Božović, JU OŠ „Radojica Perović", Podgorica

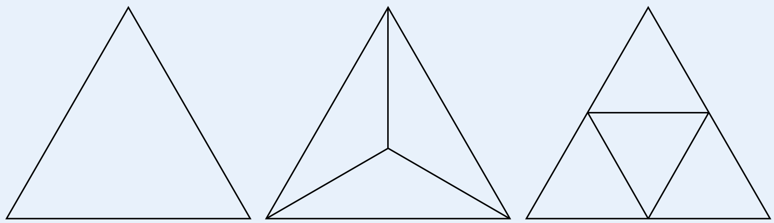
Dr Radoje Šćepanović

RAZREZIVANJE TROUGLA NA PODUDARNE I SLIČNE TROUGLOVE

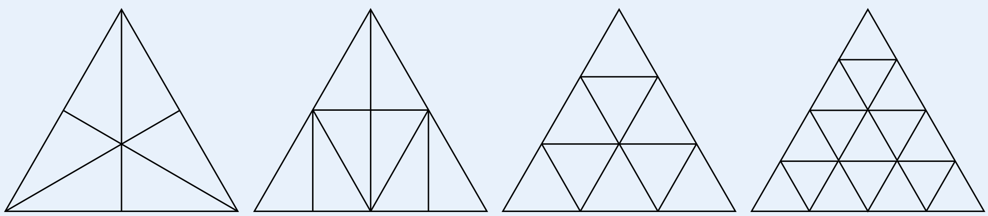
Zadaci sa razrezivanjem figura prisutni su od početka školovanja - ima ih i u početnim razredima osnovne škole. U ovom članku razmatraćemo razrezivanje trougla na podudarne i slične trouglove.

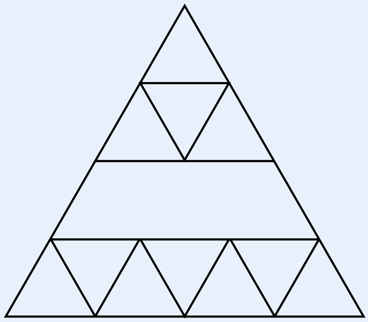
Vidjećete da neki jednostavno formulisani zadaci još nijesu riješeni.

a) Razrezivanje jednakostraničnog trougla na 2, 3 ili 4 podudarna trougla je prilično prosto (vidi slike).



Takođe, bez teškoća se jednakostranični trougao može razrezati i na 6, 8, 9 i 16 podudarnih trouglova (vidi slike).



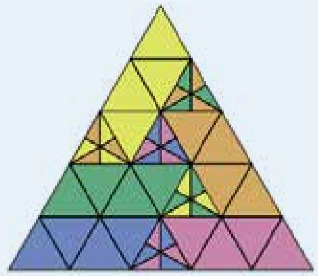


U poslednja dva slučaja stranicu trougla smo dijelili na 3, odnosno 4 jednaka dijela. Tada smo trougao mogli razrezati na 9, odnosno 16 podudarnih jednakostraničnih trouglova. Razmotrimo slučaj kada je stranica trougla podijeljena na n jednakih djelova (vidi sliku desno). Kako je stranica malog trougla n puta manja od stranice polaznog trougla, to je njegova površina n^2 manja od površine polaznog trougla. Stvarno, površina jednakostraničnog trougla stranice a jednaka je:

$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a površina jednakostraničnog trougla stranice $\frac{a}{n}$ jednaka je

$P_m=\frac{a^2\sqrt{3}}{4n^2}$, pa je $P_m=\frac{P}{n^2}$. Slijedi, u polaznom trouglu ima n^2 malih trouglova. Broj ovih trouglova možemo izračunati i na sljedeći način: U prvom redu (kod vrha trougla) imamo 1 mali trougao, u drugom 3 mala trougla, u trećem 5 malih trouglova itd. U zadnjem (pri osnovici polaznog jednakostraničnog trougla) imamo $(2n-1)$ malih trouglova. Ukupno imamo $1+3+5+...+(2n-1)$ malih trouglova. Kako je broj malih trouglova jednak n^2, to smo dokazali jednakost:

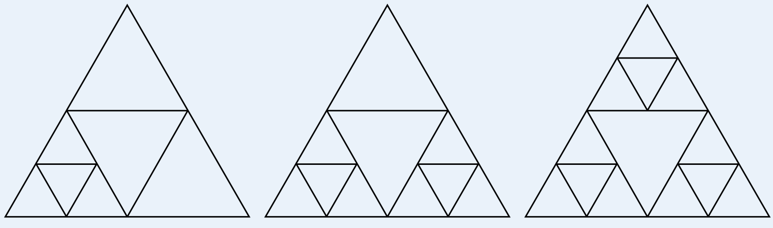
$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2.$$



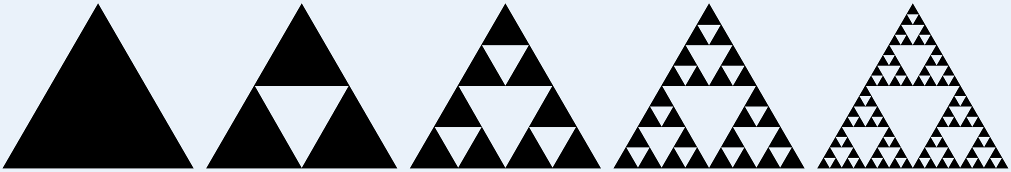
Razrezivanje na 5 jednakih djelova je, prije nekoliko godina, našao Mihail Potrakejev (vidi sliku). Andrej Garkavij je svaki od tih djelova podijelio po pola i tako trougao podijelio na 10 jednakih djelova. Nešto kasnije je Pavel Guzenko našao razrezivanje na 15 jednakih djelova, a iz njega se dobilo razrezivanje na 30 jednakih djelova. Ovdje se pod jednakim djelovima podrazumijevaju podudarni djelovi.

Do danas niko nije našao kako jednakostranični trougao razrezati na 7 ili 11 jednakih djelova. Možda će neko od vas, jednog dana, pokušati da riješi ovaj problem.

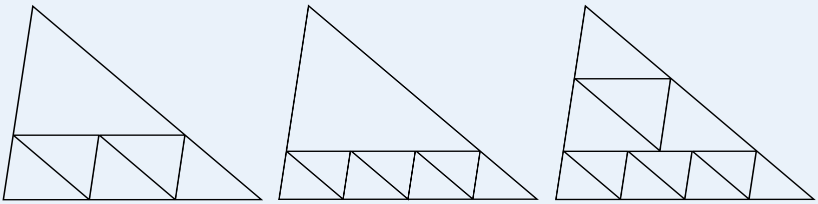
b) Vidjeli smo da se na prost način jednakostranični trougao može razrezati na 4 podudarna jednakostranična trougla. Dovoljno je dužima povezati sredine stranica trougla, tj. nacrtati srednje linije trougla. Nastavljajući ovaj postupak trougao možemo razrezati na 7, 10, 13... jednakostraničnih trouglova (vidi slike). U opštem slučaju, može se razrezati na $3k+1$, k – prirodan broj, jednakostraničnih trouglova.



Na sličan način se gradi i trougao Sjerpinskog (ovakve figure se nazivaju fraktalima). U jednakostranični trougao ucrtaju se srednje linije trougla i „isključi“ srednji od četiri dobijena trougla. Ovaj postupak se nastavlja i u svakom od tri preostala trougla itd. do beskonačnosti. Dobijena figura ima istu formu kao i njeni djelovi (vidi slike).

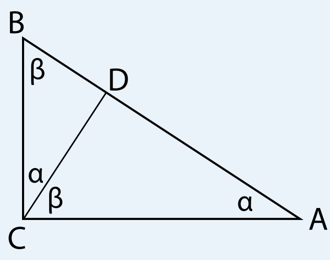


Sve prethodno se, bez teškoća, može prenijeti i na proizvoljne trouglove. Dovoljno je nacrtati tri familije paralelnih pravih (u svakoj familiji prave su paralelne jednoj stranici trougla i dijele preostale dvije stranice na jednake djelove, pri čemu je $n > 5$). Na sljedećim slikama je prikazano dijeljenje trougla na 6, 8 i 11 sličnih trouglova.

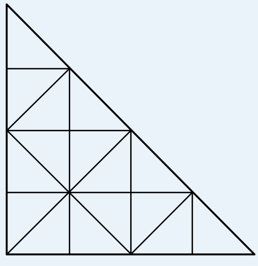


Razrezati na 2, 3 ili 5 trouglova, sličnih polaznom trouglu, nije moguće za svaki trougao.

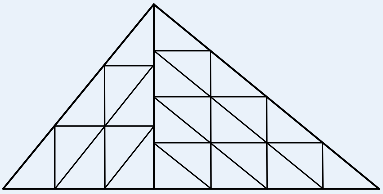
Razmotrimo, specijalno, razrezivanje pravouglog trougla. U svakom pravouglom trouglu, visina nad hipotenuzom, dijeli taj trougao na dva njemu slična trougla (vidi sliku): $\Delta ABC \sim \Delta CAD \sim \Delta BCD$. Produžavajući ovaj proces možemo ΔABC razrezati na proizvoljan broj njemu sličnih trouglova.



Ako je pravougli trougao jednakokrak, tada se razrezivanjem dobijaju podudarni jednakokraki pravougli trouglovi. Poslije n koraka dobija se 2^n takvih trouglova. Na slici je dat slučaj za $n = 4$, kada se dobija 16 ($=2^4$) trouglova.



Razrezivanje pravouglog trougla na pravougle trouglove, slične polaznom trouglu, moguće je i u slučaju kada se dužine kateta trougla izražavaju cijelim brojevima, Ako su dužine kateta jednake m i k, tada se trougao može razrezati na $m^2 + k^2$ trouglova sličnih polaznom trouglu. Slučaj $k = 3$ i $m = 4$ prikazan je na slici desno ($3^2 + 4^2 = 25$ trouglova).



Zadaci za vježbu:

1. Koliko je 1 + 3 + ... + 17 + 19?
2. Proizvoljni trougao razrezati na 16 podudarnih trouglova.
3. Proizvoljni pravougli trougao razrezati na 3 njemu slična trougla.
4. Navesti primjer pravouglog trougla koji se može razrezati na 4 podudarna trougla.
5. Proizvoljni trougao razrezati na 7 njemu sličnih trouglova.
6. Navesti primjer trougla koji se može razrezati na 3 njemu slična trougla.
7. Razrezati pravougli trougao čije su katete 2 i 3 (dužinske) jedinice na 13 pravouglih trouglova sličnih polaznom trouglu.

POZIV ZA MEĐUOPŠTINSKA TAKMIČENJA

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore (UNMCG)

14. februara 2025. godine

organizuje

Međuopštinska takmičenja za učenike VI, VII, VIII i IX razreda

*u **Podgorici** (za opštine: Podgorica, Zeta, Danilovgrad i Tuzi),*

***Nikšiću** (za opštine Nikšić, Plužine i Šavnik) i*

***Bijelom Polju** (za opštine Bijelo Polje i Berane).*

Međuopštinska takmičenja su iskorak u odnosu na dosadašnje aktivnosti UNMCG, s ciljem da se u narednim godinama ovo takmičenje proširi i na druge opštine u Crnoj Gori.

Pozivamo nastavnike i učenike da se prijave na takmičenje.

Takmičarima i njihovim želimo mentorima puno uspjeha na takmičenju.

1. Koliki je zbir brojeva u datom redu sledećeg trougla?

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

. . .

Ulaz: Redni broj k ($1 \le k \le 5 \cdot 10^5$), reda trougla čiji zbir treba izračunati (brojanje redova počinje od 1).

Izlaz: Zbir vrijednosti u zadatom redu trougla.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**
`3`	`35`
`4`	`91`

Rješenje: Do rješenja se može doći korišćenjem petlji (ciklusa). U prvoj petlji određujemo prvi element k - tog reda, a uz to određujemo i broj elemenata u njemu. Prvi element određujemo tako što saberemo broj elemenata u prethodnih ($k – 1$) redova, dok broj elemenata svakog reda određujemo tako što u svakom koraku broj elemenata prethodnog reda uvećavamo za dva (svaki naredni red ima tačno dva elementa više od prethodnog). Dakle, u petlji održavamo početak i broj elemenata tekućeg reda (inicijalizujemo ih na jedan, jer prvi red počinje od jedan i ima tačno jedan element) i ($k – 1$) puta početak reda uvećavamo za broj elemenata tekućeg reda, a broj elemenata tekućeg reda za dva.

2. Napisati program koji učitava niz cijelih brojeva, a zatim ga transformiše tako da elementi budu podijeljeni u tri dijela u zavisnosti od zadatih vrijednosti A i B. U prvom dijelu su elementi manji od zadate vrijednosti A (tj. vrijednosti iz intervala $[-\infty, A)$), u drugom elementi veći ili jednaki zadatoj vrijednosti A i manji ili jednaki zadatoj vrijednosti B (vrijednosti

A (tj. vrijednosti iz intervala [$-\infty$, A)), u drugom elementi veći ili jednaki zadatoj vrijednosti A i manji ili jednaki zadatoj vrijednosti B (vrijednosti iz intervala [A, B]), a u trećem elementi veći od zadate vrijednosti B (vrijednosti iz intervala (B, $+\infty$)). Nije bitno u kom se redosledu nalaze elementi unutar dijelova. Učitati elemente u niz, a zatim reorganizovati redosled elemenata u tom nizu (ne koristiti pomoćne nizove). **Ulaz**: U prvoj liniji standardnog ulaza nalazi se broj elemenata niza N, a zatim se, u narednoj liniji nalaze elementi niza razdvojeni razmacima. U poslednjoj liniji se nalaze cijeli brojevi A i B odvojeni prazninom, i pri tome je A < B. **Izlaz**: Ispisati elemente rezultujućeg niza na standardni izlaz (moguće je ispisati elemente svake od tri grupe u posebnom redu, razdvojene razmacima, a moguće je ispisati i cio niz u jednom redu ili u više redova).

Ulaz	**Izlaz**

`10`
`1 3 5 4 8 5 7 2 3 6`
`3 5`
	`1 2 5 4 5 3 3 7 6 8`

Rješenje: Održavaćemo tri promjenljive l, d, j i tokom petlje vodeći računa da važi da je $0 \leq l \leq d \leq j \leq n$ i da važe sledeći uslovi:

- U intervalu pozicija [0, l) nalaziće se elementi manji od A tj. brojevi iz intervala ($-\infty$, A),
- u intervalu pozicija [l, j) nalaziće se elementi iz intervala [A, B],
- u intervalu pozicija [j, d) nalaziće se elementi koji još nijesu ispitani,
- u intervalu pozicija [d, n) nalaziće se elementi koji su veći od B tj. elementi iz intervala (B, $+\infty$).

Dakle, održavamo raspored <<<<===???>>>, gdje su sa < obilježeni elementi prve grupe, sa = elementi druge, a sa > elementi treće grupe. Na početku mora da važi da je $j = 0$ i $d = n$ (jer su svi elementi iz intervala [j, d) = [0, n) neispitani). Takođe, da bismo bili sigurni da su u intervalu [0, l) svi elementi manji od A, taj interval mora biti prazan i mora da važi da je $l = 0$. Nakon ovakve inicijalizacije i interval [l,j) = [0, 0) i interval [d, n) = [n, n) je prazan, pa zadovoljava nametnuti uslov. Petlja će se izvršavati dok god ima neispitanih elemenata, a to je dok je $j < d$. Razmotrimo kako treba da izgleda tijelo petlje, da bi uslovi bili održani:

- Ako je element na poziciji j manji od broja A tada ćemo ga zamijeniti sa elementom na poziciji l (prvim elementom iz intervala [A, B]), nakon čega možemo uvećati obje promjenljive l i j.

- U suprotnom, ako je element na poziciji j manji ili jednak od B, on pripada intervalu [A, B] i već je na svom dopuštenom mjestu, pa samo možemo uvećati vrijednost j.
- U suprotnom element je veći od B i tada možemo smanjiti vrijednost d i razmijeniti element na poziciji j sa elementom na (umanjenoj) poziciji d, ne mijenjajući vrijednost j (da bi se element koji je upravo doveden na poziciju j mogao ispitati u narednoj iteraciji).

3. Dat je uređeni niz prirodnih brojeva. Odrediti najmanji prirodan broj koji nije zbir nekih elemenata tog niza pri čemu svaki element niza može samo jednom učestvovati u zbiru. **Ulaz**: Sa standardnog ulaza se učitava broj n ($1 \leq n \leq 10^3$), a zatim je u narednom redu sortiran niz od različitih prirodnih brojeva manjih od 10^4. **Izlaz**: Na standardni izlaz ispisati traženi najmanji prirodan broj koji nije zbir nekih elemenata tog skupa.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**
`8` `1 2 4 7 15 32 35 48`	`30`

4. Ako je dato nekoliko prostih brojeva, njihov proizvod se može veoma lako i brzo odrediti. Međutim, ako je dat proizvod, često je veoma teško odrediti proste brojeve koji ga sačinjavaju. Napisati program koji rješava taj problem. **Ulaz**: Sa standardnog ulaza se unosi jedan prirodan broj n ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^9$). **Izlaz**: Na standardni izlaz ispisati proste činioce broja n, uređene od najmanjih do najvećih, razdvojene razmakom.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**
`900`	`2 2 3 3 5 5`

Rješenje: Potencijalni činioci f broja n se ispituju redom, u petlji, krenuvši od broja 2. U svakom koraku ispituje se da li je broj n djeljiv brojem f i dok god jeste djeljiv, u unutrašnjoj petlji, on se dijeli brojem f štampajući pri tom činilac f, jer se u sklopu uslova unutrašnje petlje vrši provjera djeljivosti n sa f). Nakon toga prelazi se na sledeći potencijalni činilac (za jedan veći od prethodnog).

5. Stanovnici 3 grada organizuju sportski turnir i žele da se podijele u timove, tako da se svaki tim sastoji samo od stanovnika jednog grada, da svi timovi imaju isti broj članova (da bi nakon runde kvalifikacija unutar svake vrste mogli svoje predstavnike da pošalju na zajednički turnir) i da je svaki sta-

novnik uključen tačno u jedan tim. Ako se zna broj stanovnika svakog od tri grada, napisati program koji određuje najveći mogući broj članova svakog tima. **Ulaz**: Sa standardnog ulaza se unose tri broja iz intervala [1, $2 \cdot 10^9$], broj stanovnika svakog grada. **Izlaz**: Na standardni izlaz ispisati jedan cio broj - traženu veličinu tima.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**
`20 30 40`	`10`

6. Ana od jednog niza cijelih bojeva A kreira novi niz B na sledeći način: element niza B na poziciji *k* jednak je prosječnoj vrijednosti svih elemenata niza A zaključno sa pozicijom *k*, uključujući i tu poziciju. Na primjer, ako je A = [1, 3, 2, 6, 8], tada se niz B izračunava na sljedeći način:

A	**1**	**3**	**2**	**6**	**8**
Računanje	**1/1**	**(1+3)/2**	**(1+3+2)/3**	**(1+3+2+6)/4**	**(1+3+2+6+8)/5**
B	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**

Vaš zadatak je da odredite niz A ako je dat niz B. **Ulaz**: Prvi red sadrži cio broj N – broj elementa niza B, $1 \leq N \leq 100$. Drugi red sadrži N elementa niza B, $1 \leq B_i \leq 10^9$. **Izlaz**: Na standardni izlaz ispisati niz A.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**
`1` `2`	`2`
`4` `3 2 3 5`	`3 1 5 11`
`5` `1 2 2 3 4`	`1 3 2 6 8`

7. U pravougloj koordinatnoj ravni nalazi se N tačaka. Napisati program koji računa broj načina na koji možemo izabrati tri tačke tako da one čine tjemena pravouglog trougla sa katetama paralelnim koordinatnim osama. **Ulaz**: U prvom redu nalazi se prirodni broj N ($3 \leq N \leq 100\,000$), broj tačaka. U svakom od sljedećih N redova nalaze se po dva prirodna broja X i Y ($1 \leq X, Y \leq 100\,000$) odvojena razmakom, koordinate jedne tačke. Nijedan par tačaka neće se nalaziti na istim koordinatama. **Izlaz**: U prvi red treba štampati traženi broj.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**

`3`
`4 2`
`2 1`
`1 3`
	`0`

`5`
`1 2`
`2 1`
`2 2`
`2 3`
`3 2`
	`4`

`6`
`10 10`
`20 10`
`10 20`
`20 20`
`30 20`
`30 30`
	`8`

8. Jednostavna klopka za komarce se sastoji od kvadratne kutije kojom možemo poklopiti više komaraca na stolu. Na stolu smo uočili N komaraca i znamo njihove tačne pozicije. Kolika je površina najmanjeg kvadrata čije su stranice paralelne stranicama stola kojim možemo uhvatiti date komarce? Ako se komarac nađe na ivici kutije, smatramo da je uhvaćen u klopku. **Ulaz**: Prvi red sadrži cio broj N – broj komaraca, $2 \leq N \leq 20$. Sledećih N redova sadrže koordinate X i Y komarca u zamišljenom koordinatnom sistemu čije su koordinatne ose stranice stola, $1 \leq X, Y \leq 100$. **Izlaz**: Na standardni izlaz štampati jedan cio broj – traženu površinu.

Primjer:

Ulaz	**Izlaz**	**Objašnjenje**

`3`
`3 4`
`5 7`
`4 3`
	`8`	**Kvadrat čija su dijagonalna tjemena (3,3) i (5,7)**

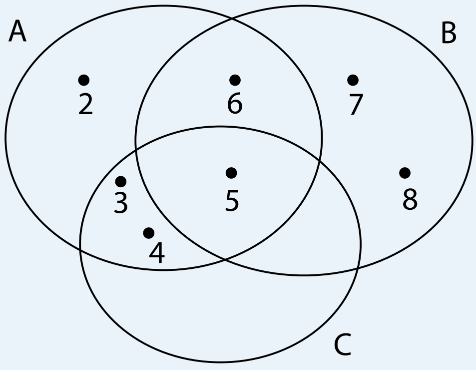
`4`
`1 5`
`5 1`
`5 10`
`10 5`
	`81`	

Zadaci za vježbu

V razred

Izrazi. Skupovi. Jednačine sa množenjem i dijeljenjem.

1. Izračunati vrijednost izraza:
   a) $43 \cdot 29 - 1616 : 8 + 17 \cdot 10$; b) $(34364 - 34114) : 25 + 19 \cdot 12$;
   c) $(104370 : 10 - 7938 : 9) \cdot 14$; d) $(148 + 2356) \cdot 25 - 8550 : 19$.
2. Izračunati primjenjujući svojstva množenja:
   a) $86 \cdot 439 + 14 \cdot 439$; b) $174 \cdot 295 - 74 \cdot 295$; c) $(20 \cdot 1784 \cdot 5) : 2$.
3. a) Razliku brojeva 9203 i 9089 povećati 206 puta, pa zatim dobijeni proizvod povećati za 4879.
   b) Odrediti količnik razlike brojeva 162920 i 6095 i zbira brojeva 150 i 275.
4. Sa jedne njive požnjeveno je 123 *t* raži, sa druge 30 *t* manje nego sa prve, a sa treće 4 puta manje nego sa prve i druge zajedno. Sva raž je sipana u džakove od 75 *kg*. Koliko je ukupno bilo džakova raži?
5. Neka su A, B, C, redom, skupovi slova riječi: DIJAGONALA, MATEMATIKA i ČASOPIS. Odrediti: a) elemente skupova A, B i C, b) $A \cap B$, c) $A \cup C$, d) $A \cap B \cap C$.
6. Nabrajanjem elemenata i Venovim dijagramom predstaviti skupove $F = \{x \mid x \in N, x \text{ je neparan broj i } x < 11\}$ i $G = \{x \mid x \in N \text{ i } 5 < x < 10\}$. Odrediti: a) nekoliko podskupova skupa G; b) tročlani skup S takav da $S \cap G = \{7, 8, 9\}$.
7. Sa dijagrama na slici odrediti elemente skupova: A, B, C, $A \cap B$, $A \cap (B \cup C)$.



8. Odrediti nepoznate elemente x i y tako da skupovi A = {5, 16, x,7, 8, 9} i B = {4, 5, 7, 8, 9, y} budu jednaki.
9. Dati su skupovi A = {x | $x \in$ N, x je neparan broj i $5 < x < 11$} i B = {x | $x \in$ N i $x + 3 \leq 11$}.

   a) Odrediti elemente skupova A i B, njihovu uniju i presjek.

   b) Odrediti sve dvočlane podskupove skupa A.

   c) Koji elementi skupa A se ne nalaze u skupu B? d) Da li je skup A podskup skupa B?
10. Skup A čine svi prirodni brojevi prve i druge desetice djeljivi sa 3, a skup B svi brojevi prve i druge desetice djeljivi sa 5. Nabrojati sve elemente tih skupova, nacrtati Venov dijagram, a zatim odrediti uniju i presjek tih skupova.
11. U jednom timu 11 ljudi zna francuski, 13 italijanski jezik, a 5 njih govori oba jezika. Koliko je ukupno ljudi u tom timu?
12. Od 28 učenika četvrtina je u horskoj, a 24 učenika u ekološkoj sekciji. Koliko učenika je u obje sekcije? Tri šestine ukupnog broja učenika koji su u ekološkoj sekciji će ići na izlet. Koliko učenika će ići na izlet?
13. Riješiti jednačine: a) $x : 16 - 1256 = 3744$; b) $105 \cdot x - 903 = 3612$; c) $x : (416 - 116 \cdot 3) = 6800$; d) $(6 \cdot x + 14) : 2 + 15 = 40$.
14. Riješiti nejednačine: a) $921 + 2 \cdot x \geq 1379$; b) $14 \cdot x - 40 < 640$; c) $15 \cdot x + 100 \leq 1000$; d) $3600 + x : 2 > 4150$.
15. Trostruka vrijednost nekog broja umanjenog za 128 iznosi 9145. Koji je to broj?
16. Učenik je zapisao jedan broj. Pomnožio ga je sa 12, a potom sa 8 i saopštio da je prvi proizvod za 1024 veći od drugog proizvoda. Koji broj je zapisao učenik?
17. Koji su mogući prirodni brojevi čiji proizvod sa 20 umanjen za 98 daje broj manji od 1102?

Prijedlog trećeg pismenog zadatka

I grupa

1. Izračunati vrijednost izraza: a) $(426 - 234) \cdot 78$; b) $(1360 - 960 : 24) : 8$.
2. Od najmanjeg petocifrenog broja oduzeti proizvod brojeva 64 i 8, a zatim razliku uvećati za najveći trocifreni broj.
3. Odrediti uniju i presjek skupova A = {5, 6, a, x,7, 8, 9} i B = {4, 5, 7, 8, 9, x}i predstaviti ih Venovim dijagramom. Odrediti 4 dvočlana podskupa skupa A.

4. Dati su skupovi: A = $\{x \mid x \in N, x$ je paran broj i $5 < x < 10\}$ i B = $\{x \mid x \in N_0$ i $x + 3 \leq 9\}$. Odrediti:
   a) elemente skupova A i B, njihovu uniju i presjek;
   b) sve podskupove skupa A.
5. a) Riješiti jednačinu: $34 \cdot x - 2209 = 2109$.
   b) Riješiti nejednačinu i odrediti skup rješenja: $60 + 2 \cdot x \geq 947 + 1269$.

II grupa

1. Izračunati vrijednost izraza: a) $(523 - 3744) \cdot 49$; b) $(1260 - 848 : 4) : 8$.
2. Petostruku vrijednost najvećeg dvocifrenog broja umanjiti za količnik broja 342 i najvećeg jednocifrenog broja.
3. Odrediti uniju i presjek skupova A = $\{5, 6, b, y, 7, 8, 9\}$ i B = $\{4, 5, 7, 8, 9, b\}$ i predstaviti ih Venovim dijagramom. Odrediti četiri dvočlana podskupa skupa A.
4. Dati su skupovi A = $\{x \mid x \in N, x$ je paran broj i $4 < x < 10\}$ i B = $\{x \mid x \in N_0$ i $x + 2 \leq 8\}$. Odrediti:
   a) elemente skupova A i B, njihovu uniju i presjek;
   b) sve podskupove skupa A.
5. a) Riješiti jednačinu: $28 \cdot x + 691 = 1419$.
   b) Riješiti nejednačinu i odrediti skup rješenja: $27 + 3 \cdot x < 6231 + 5940$.

Redakcija časopisa „Dijagonala"

VI razred

Razlomci. Osna i centralna simetrija.

1. Skratiti razlomke:
   a) $\frac{14}{49}$; b) $\frac{60}{270}$; c) $\frac{15}{25}$; d) $\frac{90}{120}$; e) $\frac{160}{256}$; f) $\frac{180}{324}$; g) $\frac{12\cdot22\cdot35}{18\cdot28\cdot55}$;
   h) $\frac{8\cdot33\cdot35}{21\cdot30\cdot44}$.
2. Sledeće brojeve prevesti u razlomke, pa ih poređati po veličini od najmanjeg ka najvećem: 1,6; $1\frac{4}{5}$; $2\frac{3}{4}$; 0,8; 3,125.
3. Napisati sve prave razlomke sa imeniocem 5, a onda sve neprave razlomke sa brojiocem 5 koji su manji od 2.
4. Odrediti razlomak koji je jednak $\frac{7}{8}$ i kome je zbir brojioca i imenioca 105.
5. Napisati sve neprave razlomke sa brojiocem 5, a zatim i sve prave razlomke sa imeniocem 5 koji su manji od $\frac{1}{2}$.

6. Odrediti razlomak koji je jednak sa $\frac{7}{15}$ i kod koga je razlika imenioca i brojioca 56.
7. Peđa je pretrčao $\frac{3}{4}$ atletske staze, a Damir za isto vrijeme $\frac{5}{24}$ staze. Kome je ostalo više do kraja staze i za koliko više, ako znamo da je staza duga 4800 m?
8. Maja je za 1 dan pročitala $\frac{7}{18}$ knjige, a Albina $\frac{5}{12}$ knjige. Koja od njih je za 1 dan pročitala veći dio knjige i koliko stranica više ako knjiga ima 252 stranice?
9. Data je prava p i tačka A koja pripada pravoj p. Konstruisati pravu n koja je normalna na pravu p i sadrži tačku A.
10. Data je prava p i tačka B koja ne pripada pravoj p. Konstruisati kružnicu k koja dodiruje pravu p, ako je tačka B njen centar.
11. Nacrtati proizvoljni četvorougao $ABCD$, a zatim osnom simetrijom preslikati dati četvorougao u odnosu na pravu koja prolazi kroz tjeme B tog četvorougla.
12. Prevesti u decimalni zapis, pa izračunati vrijednost izraza:
$$7\frac{7}{25}-\left(1\frac{1}{2}+2{,}45\right).$$
13. Riješti jednačine:

    a) $1{,}35+x=6{,}9$; b) $\frac{8}{15}-x=\frac{1}{3}$; c) $3\frac{3}{8}+\left(6\frac{1}{6}-x\right)=4\frac{13}{24}$.
14. Izračunati:

    a) $\frac{3}{10}+\frac{7}{15}$; b) $1{,}54+0{,}3+0{,}16$; c) $4\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}+0{,}57\right)$.

Prijedlog trećeg pismenog zadatka

I grupa

1. Date razlomke i decimalne brojeve poređati po veličini:

   a) $\frac{8}{15},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{7}{10}$; b) 2,36; 2,306; 0,263; 0,063.
2. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)$; b) $3{,}45-(0{,}9+0{,}35)$; c) $\left(2\frac{1}{9}-\left(1\frac{1}{6}+\frac{5}{18}\right)\right)-\frac{1}{2}$.
3. Riješiti jednačine: a) $2\frac{4}{15}+x=5\frac{3}{5}$; b) $4{,}535-x=0{,}235+1{,}3$.
4. Ako je $4\frac{1}{2}-B=1{,}25$, odrediti x iz jednačine: $B+(x-0{,}1)=2{,}7+3\frac{3}{5}$.

5. Osnom simetrijom preslikati trougao ABC ako osa simetrije siječe dvije stranice trougla.

II grupa

1. Date razlomke i decimalne brojeve poređati po veličini:

   a) $\frac{5}{9}, \frac{13}{18}, \frac{17}{36}, \frac{7}{12}$; b) 5,403; 5,43; 5,043; 0,543.

2. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{18}\right)$; b) $3{,}48-(0{,}08+1{,}2)$;

   c) $2\frac{1}{24}-\left(3\frac{7}{12}-\left(\frac{5}{8}+1\frac{5}{6}\right)\right)$.

3. Riješiti jednačine: a) $4\frac{5}{6}-x=1\frac{1}{2}$; b) $x-1{,}45=0{,}535+1{,}015$.

4. Ako je $B-0{,}25=3$, odredi x iz jednačine: $B-(x+0{,}75)=2-\frac{5}{6}$.

5. Centralnom simetrijom preslikati trougao ABC tako da centar simetrije bude tačka B.

Fuad Kršić, JU OŠ „Dr Dragiša Ivanović", Podgorica

VII razred

Trougao. Skup racionalnih brojeva.

1. Konstruisati trougao čiji su poznati elementi:

   a) AC = 6 *cm*, BC = 7,2 *cm*, $\gamma = 75°$; b) BC = 6 *cm*, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$;

   c) AB = 5,6 *cm*, BC = 6,5 *cm*, AC = 7 *cm*; d) $\alpha = 60°$, $h_c = 3$ *cm*, BC = 4 *cm*.

2. Konstruisati pravougli trougao čija je hipotenuza dužine 10 *cm*, a jedna kateta je dužine 6 *cm*.
3. Konstruisati pravougli trougao čija je jedna kateta 65 *mm*, a na njoj nalegli ugao 22°30'.
4. Konstruisati jednakokrako–pravougli trougao ABC čija je hipotenuza 4,8 *cm*.
5. Konstruisati jednakostranični trougao ABC ako je visina 5 *cm*.
6. Konstruisati trougao ABC ako je AB = 3 *cm*, BC = 7 *cm* i $\alpha = 120°$.
7. U tupouglom trouglu konstruisati:

   a) upisanu kružnicu; b) opisanu kružnicu; c) ortocentar; d) težište.

8. Poluprečnik kružnice opisane oko jednakostraničnog trougla je 3 *cm*. Izračunati poluprečnik upisane kružnice. Kolika je dužina visine tog trougla?
9. Obim pravouglog trougla je 30 *cm*, a dužina njegove hipotenuze je 12 *cm*. Odrediti poluprečnik kružnice upisane u taj trougao.

10. a) Na koordinatnoj osi prikazati tačke A$(-\frac{3}{5})$, B$(-\frac{13}{4})$, C$(-2{,}5)$ i D$(0{,}2)$.
    b) Poređati brojeve od najmanjeg do najvećeg: $-1;\ -\frac{3}{5};\ -\frac{1}{2};\ -2{,}4;\ -\frac{17}{4}$.
11. Izračunati: a) $-3\frac{7}{9}-\frac{5}{6}$; b) $-\frac{3}{8}+0{,}2$; c) $-11{,}25+7{,}6$; d) $-2{,}5-7{,}374$.
12. Izračunati vrijednost izraza:
    a) $0{,}63+\left(-2\frac{3}{4}+1{,}8\right)$; b) $\left|-2\frac{1}{6}+3\right|-1{,}9$;
    c) $\left(-2\frac{1}{3}-1{,}5\right)+\left(0{,}1-\frac{5}{9}\right)$; d) $-\frac{11}{24}-\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$;
    e) $3\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+(-1{,}4)+(-3{,}2)$; f) $17{,}6-(-5{,}37-(-3{,}64-(-3{,}4)))$.
13. Odrediti vrijednost izraza: a) $x-y$; b) $|x+y|$; c) $-1+|x|-|y|$;
    ako je: $x=-0{,}3-(-0{,}03-0{,}003)$ i $y=-(-0{,}5+(-0{,}05+0{,}005))$.
14. Riješiti jednačine:
    a) $x-1\frac{1}{3}=-4\frac{1}{2}$; b) $-2{,}5-x=-5{,}11$; c) $4\frac{3}{4}-\left(x+1\frac{2}{3}\right)=2\frac{1}{2}$;
    d) $x+(-1{,}75)=-4\frac{3}{10}$; e) $x-\left(-3\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{4}$; f) $\left(-x-4\frac{7}{8}\right)-\frac{5}{6}=-\frac{1}{3}$.
15. Koji broj treba dodati broju $-0{,}45$ da bi se dobio broj za $\frac{9}{100}$ manji od apsolutne vrijednosti broja $-0{,}45$?
16. Riješiti nejednačine:
    a) $-1\frac{2}{3}+a\geq-5\frac{3}{5}$; b) $-4\frac{4}{9}<7\frac{1}{3}-\left(a+\frac{7}{18}\right)$; c) $1\frac{5}{6}-a>-2\frac{1}{4}$;
    d) $a-(-1{,}5)\geq-2\frac{3}{4}$; e) $-a+2{,}9\leq-3{,}33$; f) $\left(2\frac{5}{12}-a\right)+4\frac{7}{9}\geq1\frac{13}{36}$.
17. Razlika brojeva $5\frac{3}{4}$ i 6,6 umanjena za neki broj nije veća od zbira istih brojeva. Odrediti te brojeve.

Prijedlog trećeg pismenog zadatka

I grupa

1. Dati su brojevi $-\frac{3}{4}$; $-0{,}4$; $0{,}3$; $\frac{2}{7}$; $-\frac{3}{5}$.
    a) Poređati ih od najvećeg do najmanjeg.
    b) Odrediti njihove apsolutne vrijednosti.
    c) Odrediti njihove suprotne brojeve.
2. Ako je $m=-8$, $n=-0{,}5$ i $p=-2\frac{1}{2}$ izračunati $|m|+n-|p|$.
3. Izračunati: a) $-3\frac{3}{5}-2\frac{1}{2}$; b) $-2\frac{2}{3}+0{,}2$; c) $-3{,}21+4{,}3-1{,}3$.
4. Od broja $-3\frac{1}{6}$ oduzeti zbir broja 0,5 i razlike brojeva $-\frac{3}{4}$ i $-1{,}4$. Koji broj se dobija?

5. a) Riješiti jednačinu: $-14-(x-4\frac{2}{3})=-\frac{7}{12}-0{,}2$.

   b) Riješiti nejednačinu i skup rješenja prikazati na brojnoj pravoj:

   $-9\frac{2}{5}-x\leq -2\frac{1}{2}$.

6. a) Konstruisati trougao ako su poznati njegovi elementi:

   AB = 4 *cm*, BC = 7 *cm* i $\beta=45°$.

   b) Dobijenom trouglu kontruisati ortocentar.

II grupa

1. Dati su brojevi: $-\frac{1}{2}$; $-0{,}3$; $0{,}4$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{2}{5}$.

   a) Poređati ih od najmanjeg do najvećeg.

   b) Odrediti njihove apsolutne vrijednosti.

   c) Odrediti njihove suprotne brojeve.

2. a) Ako je $m=-1$, $n=-0{,}5$ i $p=-1\frac{1}{2}$ izračunati $|m|+|n|-p$.

3. Izračunati: a) $-2\frac{3}{5}-3\frac{1}{2}$; b) $-1\frac{2}{3}+0{,}6$; *c*) $-5{,}11+3{,}5-1{,}7$.

4. Od broja $-3\frac{3}{5}$ oduzeti razliku broja 1,6 i zbira brojeva $-\frac{5}{6}$ i $-0{,}7$. Koji broj se dobija?

5. a) Riješiti jednačinu: $-10\frac{5}{8}-(x-1\frac{4}{5})=4\frac{3}{4}+0{,}5$.

   b) Riješi nejednačinu i skup rješenja prikazati na brojnoj pravoj:

   $-7\frac{3}{8}-x\geq -3\frac{1}{2}$.

6. a) Konstruisati trougao ako su poznati njegovi elementi:

   AC = 5 *cm*, $\alpha=45°$ i $\gamma=60°$.

   b) U dobijeni trougao upisati kružnicu.

Snežana Knežević, JU OŠ „Radoje Čizmović“, Nikšić

VIII razred

Jednačine i nejednačine. Pitagorina teorema.

1. Riješi sistem nejednačina:

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{6}-\frac{2}{3}x\leq\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{6}x \\ \frac{x^2}{6}-\frac{3x+1}{4}<\frac{4x-3}{2}+\frac{2x^2-1}{6}-1\frac{1}{3} \end{cases}$$

2. Riješiti nejednačinu:

   a) $(5-x)(4+2x) \geq 0$; b) $\dfrac{-3}{1+2x} \leq 0$.

3. Riješiti jednačinu: $(3x-7)^2-(4x+5)(4x-3)=9(x+3)(x-3)-(4x+5)^2$.
4. Odrediti broj a tako da jednačine:
   $2ax-\frac{1}{3}x=a+4$ i $-\frac{1}{4}(2x-1)=x-\frac{1+x}{2}$ budu ekvivalentne.
5. Ako se trostruka vrijednost nepoznatog broja umanji za 2,5 dobija se polovina tog broja uvećana za 5. Koji je to broj?
6. Na polici su bili sokovi u bocama od 1 l. Gaziranih sokova je $\frac{3}{10}$. Ako trgovac proda 15 l negaziranih sokova ostaće dva puta manje gaziranih nego negaziranih sokova. Koliko litara soka je bilo na polici?
7. Tamara je danas tri puta starija od Ljilje, a prije pet godina je bila četiri puta starija od nje. Koliko godina sada ima Tamara, a koliko Ljilja?
8. Obim jednakokrakog trougla je 16 *cm,* a osnovica je za 1 *cm* duža od kraka. Izračunati površinu tog trougla.
9. Izračunaj O, P, r_o i r_u kružnice jednakostraničnog trougla čija je visina $9\sqrt{3}$ *cm*.
10. Dijagonala kvadrata ima dužinu $12\sqrt{2}$ *cm*. Ako je stranica AB kateta pravouglog trougla ABE, čija je hipotenuza za 1 *cm* duža od stranice ovog kvadrata, izračunati obim i površinu trougla ABE.
11. Visina pravouglog trougla je 12 *cm*, a jedan hipotenuzin odsječak 16 *cm*. Izračunati dužine kateta i hipotenuze, obim i površinu trougla.
12. Razlika dužine dijagonale i jedne stranice pravougaonika je 8 *cm*, a druga stranica pravougaonika je 16 *cm*. Izračunati površinu tog pravougaonika.
13. Konstruisati duži dužine: a) $\sqrt{21}$; b) $\sqrt{10}$; c) $\sqrt{45}$.

Prijedlog trećeg pismenog zadatka

I grupa

1. Riješiti sistem nejednačina:

$$\begin{cases} (3x+4)^2-(3x-1)(3x+8)+1<(4x+3)^2-(4x-5)(4x-5)-12(x+3) \\ \dfrac{3x-2}{4}-\dfrac{x+5}{16} \geq \dfrac{4x-1}{8}-\dfrac{2x+3}{2}-\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

2. Riješiti jednačinu: $(6x-1)^2-(6x+5)(6x-5)+50=(3x+4)^2-(3x+7)\cdot 3x$.

3. Hipotenuza pravouglog trougla je za 50 *cm* duža od jedne katete, a druga kateta je 60 *cm*. Izračunati obim tog trougla.
4. Dužina pravougaonika je 48 *cm*, a dijagonala i širina pravougaonika su u razmjeri 25 : 7. Izračunati obim pravougaonika.
5. a) Obim jednakokrakog trougla je 252 *cm*, a dužina polovine osnovice je 56 *cm*. Izračunati površinu tog trougla.

   b) Izračunati površinu kvadrata čija je dijagonala $12\sqrt{2}$.

II grupa

1. Riješiti sistem nejednačina:

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{2} - 1\frac{2}{3} < x - \frac{x-3}{6} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{5x-7}{6} \geq \frac{2x-1}{3} + \frac{2x^2+9}{18} \end{cases}$$

2. Riješiti nejednačinu: $(3x - 6)\,(3 + x) \leq 0$.
3. Dužina jedne katete je 12 *cm*, hipotenuza je za 8 *cm* duža od druge katete. Izračunati obim trougla.
4. U jednakokrakom trougla P = 1680 cm^2 a visina koja odgovara osnovici je h_a = 15 *cm*. Izračunati njegov obim.
5. a) Površina kvadrata je 256 cm^2. Izračunati njegov obim i dužinu dijagonale.

   b) Izračunati dijagonalu pravougaonika čija je površina 48 cm^2, a dužina jedne stranice 6 *cm*.

Ana Jovanović, JU OŠ „Luka Simonović", Nikšić

IX razred

Prizma. Piramida. Sistemi jednačina.

1. Zapremina pravilne trostrane prizme iznosi 120 cm^3. Površina baze je 12 cm^2. Kolika je visina te prizme?
2. Površina pravilne četvorostrane prizme je 320 cm^2. Odnos visine prizme i osnovne ivice je $H : a = 3 : 2$. Odrediti:

   a) dužinu osnovne ivice; b) visinu prizme; c) zapreminu prizme.
3. Površina omotača pravilne šestostrane prizme je 648 cm^2, a dijagonala bočne strane je 15 *cm*. Izračunati površinu prizme.

4. Odrediti površinu i zapreminu pravilne šestostrane piramide ako je njen najveći dijagonalni presjek jednakokraki pravougli trougao sa katetom dužine 8 cm.
5. Osnovna ivica pravilne šestostrane prizme je četiri puta kraća od njene visine, a zbir dužina visine i osnovne ivice je 30 cm. Izračunati površinu i zapreminu te prizme.
6. Izračunati površinu pravilne trostrane piramide ako je osnovna ivica:
   a) 6 cm i visina bočne strane 10 cm; b) 6 cm i visina piramide $\sqrt{6}$ cm;
   c) 10 cm i bočna ivica 13 cm.
7. Izračunati površinu omotača pravilne četvorostrane piramide ako je njena bočna ivica dužine 8 cm nagnuta prema ravni osnove pod uglom od:
   a) 60^{o}; b) 30^{o}; c) 45^{o}.
8. Osnova prave četvorostrane piramide je romb čiji je oštar ugao jednak 60^{o} i čija je dužina stranice 10 cm, a njena bočna ivica obrazuje sa ravni osnove ugao od 45^{o}. Izračunati: a) dužine dijagonala romba; b) visinu piramide; c) površinu i zapreminu piramide.
9. Riješiti sistem jednačina:

$$a)\begin{cases}2x+y=6\\3x+4y=4\end{cases};\quad b)\begin{cases}3(2a-b)-4(a+b)=5\\2(3a+b)+a-5b=7\end{cases};\quad c)\begin{cases}\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}=1\\\dfrac{2a}{3}+\dfrac{b}{4}=2\end{cases};$$

$$d)\begin{cases}3(3x+2)+2\dfrac{1}{2}(y-1)=-6\\1{,}5(2y+5)+2(x-2)=\dfrac{37}{2}\end{cases};\qquad e)\begin{cases}(x-2)(y+1)=3\\(x+1)(y-2)=-4\end{cases};$$

$$f)\begin{cases}-\dfrac{3(2x+y)}{8}+\dfrac{5(y-x)}{3}=\dfrac{3-3y-2x}{2}+\dfrac{7(x+y-1)}{6}\\\dfrac{3x-1-y}{6}+\dfrac{4(x+y+3)}{5}-\dfrac{4x+2y}{3}=\dfrac{7x-5y-5}{10}\end{cases}$$

10. Razlika dva broja je 20, a razlika njihovih kvadrata je 160. Koji su to brojevi?
11. Zbir trostruke vrijednosti prvog i polovine drugog broja je 32. Odrediti te brojeve ako je prvi za 6 manji od drugog.
12. Prije 10 godina otac je bio četiri puta stariji od svog sina, a kroz 10 godina će biti dva puta stariji od sina. Koliko je ocu godina?

Prijedlog trećeg pismenog zadatka

I grupa

1. Dijagonala kockine strane ima dužinu $5\sqrt{2}$ *cm*. Izračunati:
   a) površinu dijagonalnog presjeka te kocke; b) zapreminu kocke.
2. Izračunati površinu pravilne šestostrane piramide ako je mjerni broj njene osnovne ivice nula funkcije 3x + 2y = 18, a dužina bočne ivice $3\sqrt{5}$ *cm*.
3. a) Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide ako je dijagonala osnove d = 40 *cm* i bočna ivica s = 29 *cm*.

   b) Osnova trostrane piramide je jednakokraki-pravougli trougao čija je kateta 4 *cm*. Podnožje visine piramide je tjeme pravog ugla, a njena dužina je jednaka kateti. Naći površinu te piramide.
4. Zadati dvocifreni broj je tri puta veći od zbira svojih cifara. Ako cifre tog broja zamijene mjesta, dobija se broj koji je za 18 manji od početnog broja. Koji je to broj?
5. Riješiti sistem jednačina:

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - 2y = -5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \dfrac{1}{a-b+3} + \dfrac{1}{2-a-b} = 1 \\ \dfrac{1}{b+a-2} - \dfrac{1}{b-3-a} = 0 \end{cases}$$

II grupa

1. Površina omotača pravilne šestostrane prizme je M = 48 m^2, a visina prizme je 8 *cm*. Izračunati površinu i zapreminu te prizme.
2. Izračunati površinu pravilne trostrane piramide ako je mjerni broj njene osnovne ivice jednak ordinati tačke u kojoj grafik funkcije $y = -\frac{3}{4}x + 10$ siječe ordinatnu osu, a dužina bočne ivice je $s = 13$ *cm*.
3. a) Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide ako je osnovna ivica 12 *cm* i apotema 10 *cm*.

   b) Veći dijagonalni presjek pravilne šestostrane piramide je jednakostranični trougao površine $36\sqrt{3}$ cm^2. Izračunati zapreminu te piramide.
4. Jedan dvocifreni broj je jednak petostrukom zbiru svojih cifara umanjenom za 6. Kada se zamijene mjesta cifara, novi broj je za 27 veći od prvobitnog. Odrediti taj broj.

5. Riješiti sistem jednačina:

$a)\ \begin{cases} 5x + y = -9 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} \dfrac{1}{a-b+2} - \dfrac{1}{1-a-b} = 0{,}3 \\ \dfrac{1}{a-b+2} + \dfrac{1}{1-a-b} = 0{,}1 \end{cases}$

Nikolina Jurišević, JU OŠ „Novka Ubović”, Podgorica

ODABRANI ZADACI

V razred

1. Sabiranjem po dva od tri nepoznata broja dobijaju se zbirovi 156, 162 i 170. Odrediti nepoznate brojeve.
2. Odrediti dva broja čiji je zbir 1 005, a količnik 4.
3. Odrediti brojeve a i b ako je a – b = 1 005 i a : b = 4.
4. Izračunati razliku trećine najvećeg četvorocifrenog broja i jedanaestine najmanjeg četvorocifrenog broja.

VI razred

1. Jakov je stazu prešao tako što je $\frac{3}{5}$ staze pretrčao, a preostalih 800 *m* prepješačio. Koliko je kilometara duga staza?
2. Odrediti sve vrijednosti prirodnog broja *n* tako da važi: $\frac{1}{3} < \frac{n}{12} \leq 0{,}75$.
3. Izračunati četvrtinu zbira svih pravih razlomaka čiji je imenilac broj 7.
4. Zbir polovine, četvrtine i osmine nekog broja iznosi 7. Naći nepoznati broj.

VII razred

1. Naći cio broj *a* tako da važi: $-\frac{5}{23} < \frac{a}{4} < -\frac{6}{23}$.
2. Odrediti razlomak jednak razlomku $\frac{7}{13}$ kod koga je zbir brojioca i imenioca jednak 140, a zatim odrediti broj za 1 manji od dobijenog razlomka.
3. Naći unutrašnje uglove proizvoljnog četvorougla ako su oni u razmjeri 1 : 2 : 3 : 4.
4. Marija je trebala da izračuna $\frac{1}{9}$ nekog broja. Greškom je dati broj umanjila za $\frac{1}{9}$ i dobila broj $-9\frac{1}{9}$. Koji rezultat bi Marija dobila da nije napravila grešku?

VIII razred

1. U pravouglom trouglu jedna kateta je 24 cm, a hipotenuza je za 16 cm veća od druge katete. Kolika je površina tog trougla?
2. Izračunati površinu pravouglog trougla čiji je jedan oštar ugao 60º, a obim $9 + 3\sqrt{3}$ cm.
3. Zbir dijagonala romba je 8 cm, a površina romba je 7 cm^2. Izračunati obim tog romba.
4. Dijagonala jednakokrakog trapeza dužine 10 cm obrazuje sa dužom osnovicom ugao od 45º. Odrediti površinu trapeza.

IX razred

1. Dimenzije osnove kvadra su 3 cm i 4 cm, a prostorna dijagonala sa ravni osnove zaklapa ugao od 45º. Izračunati zapreminu kvadra.
2. Površina pravilne trostrane piramide je $648\sqrt{3}$ cm^3. Izračunati zapreminu piramide ako je osnovna ivica 2 puta manja od visine date piramide.
3. Izračunati površinu pravilnog tetraedra čija je zapremina $18\sqrt{2}$ cm^3.
4. U jednom dvocifrenom broju cifra desetica je 2 puta manja od cifre jedinica. Ukoliko cifre zamijene mjesta dobija se broj za 18 veći od datog dvocifrenog broja. Naći dvocifreni broj.

TAKMIČARSKI ZADACI

V razred

1. Napisati broj 1 000 000 kao proizvod dva prirodna broja u čijim zapisima nema cifre 0.
2. Ako jednu stranicu kvadrata uvećamo 4 puta, a drugu stranicu uvećamo 3 puta dobićemo pravougaonik površine 192 cm^2. Izračunati za koliko je obim datog kvadrata manji od obima dobijenog pravougaonika.

VI razred

1. Kada je vraćena četvrtina duga, zatim $\frac{4}{9}$ ostatka i još 320 eura, ostalo je još da se vrati $\frac{3}{20}$ duga. Koliko iznosi cio dug?
2. Putnik je prvog dana prešao $\frac{3}{8}$ predviđenog puta, drugog $\frac{5}{12}$, a trećeg 15 km više od šestine puta i tako stigao do cilja. Kolika je dužina puta?

VII razred

1. Dokazati da je u pravouglom trouglu zbir kateta jednak dvostrukom zbiru poluprečnika opisane i upisane kružnice.
2. Zbir polovine, trećine i sedmine nekog broja je za 1 manji od apsolutne vrijednosti tog broja. Koji je to broj?

VIII razred

1. Ako su a i b katete pravouglog trougla, c hipotenuza, a h visina koja odgovara hipotenuzi, dokazati da je trougao čije su stranice $a + b$, h i $c + h$ pravougli.
2. Izračunati obim pravouglog trapeza čija je kraća dijagonala 5 *cm*, duži krak 6 *cm,* a tup ugao 150º.

IX razred

1. Dimenzije kvadra su tri uzastopna prirodna broja, a njegov dijagonalni presjek je kvadrat. Naći zapreminu tog kvadra.
2. Mitar sada ima 4 puta više godina nego što je imala Kalina kada je bila 2 puta mlađa od njega. Koliko godina ima Mitar ako će kroz 6 godina on i Kalina imati ukupno 75 godina?

RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

V razred

1. Od 900 *kg* brašna pekara je prvog dana potrošila četvrtinu, a drugog dana tri petine ostatka. Koliko je brašna ostalo?
2. Jakov je pravougaonik čiji je obim 168 *mm* podijelio na 5 kvadrata čije su dužine stranica jednake. Koliki je obim jednog od tih kvadrata?

Rješenja:

1. Prvog dana pekara je potrošila 900 : 4 = 225 *kg* brašna. Nakon prvog dana u pekari je ostalo 900 – 225 = 675 *kg* brašna. Drugog dana pekara je potrošila (675 : 5) · 3 = 405 *kg* brašna. Poslije drugog dana u pekari je ostalo 675 – 405 = 270 *kg* brašna.
2. Označimo stranicu kvadrata sa a. Kako je pravougaonik podijeljen na 5 kvadrata čije su stranice jednakih dužina to zaključujemo da je dužina pravougaonika $5a$ a širina a.

Imamo da je obim datog pravougaonika $2 \cdot 5a + 2 \cdot a = 168\ mm$

$$10 \cdot a + 2 \cdot a = 168\ mm$$
$$12 \cdot a = 168\ mm$$
$$a = 168\ mm : 12$$
$$a = 14\ mm.$$

Obim jednog kvadrata je $O = 4 \cdot a$

$$O = 4 \cdot 14\ mm = 56\ mm.$$

VI razred

1. Ugao α je za dvije petine pravog ugla veći od njemu suplementnog ugla Naći ugao α.
2. Izračunati zbir najmanjeg i najvećeg razlomka čiji je brojilac iz skupa A = {x | x je djelilac broja 8}, a imenilac iz skupa B = {3, 5, 9}.

Rješenja:

1. Dvije petine pravog ugla iznosi $(90^o : 5) \cdot 2 = 18^o \cdot 2 = 36^o$. Imamo da je ugao α za 36º veći od njegovog suplementnog ugla. Tada je suplementni ugao za 36º manji od α, odnosno suplementni ugao je $\alpha - 36^o$. Tada imamo da je: $\alpha + \alpha - 36^o = 180^o$

$$2\alpha = 180^o + 36^o$$
$$2\alpha = 216^o \text{ odnosno } \alpha = 108^o.$$

2. Elementi skupa a su A = {1, 2, 4, 8}. Najmanji razlomak je $\frac{1}{9}$ a najveći $\frac{8}{3}$ pa je njihov zbir $\frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{1}{9} + \frac{24}{9} = \frac{25}{9}$.

VII razred

1. Simetrale dva ugla trougla se sijeku pod uglom od 124º. Izračunati mjeru trećeg ugla tog trougla.
2. Izračunati vrijednost izraza $2021x + 2022x + 2023x + 2024x + 2025x$ ako je x najmanje cjelobrojno rješenje nejednačine $|x| < 6$.

Rješenja:

1. Neka se simetrale uglova α i β sijeku pod uglom od 124º. Tada imamo da je: $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + 124^o = 180^o$, a odatle je $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 180^o - 124^o = 56^o$. Dalje je $\alpha + \beta = 112^o$. Kako za bilo koji trougao važi da mu je zbir unutrašnjih uglova 180º, to je veličina nepoznatog unutrašnjeg ugla $180^o - 112^o = 68^o$.

2. Cjelobrojna rješenja nejednačine $|x| < 6$ su 0, –1, 1, –2, 2, –3, 3, –4, 4, –5 ili 5. Najmanje cjelobrojno rešenje je $x = -5$ pa zamjenom u izraz $2021x + 2022x + 2023x + 2024x + 2025x$ dobijamo
$(2021 + 2022 + 2023 + 2024 + 2025) \cdot (-5) = 10\,115 \cdot (-5) = -50\,575$.

VIII razred

1. Na kvizu znanja je svaka ekipa imala sa svakom od ostalih ekipa po jedan duel. 90% ekipa postiglo je bar po jednu pobjedu a neriješenih rezultata nije bilo. Koliko ekipa je učestvovalo u kvizu?
2. Ako je $\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{75}$, izračunati $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Rješenja:

1. Iz uslova zadatka zaključujemo da je 10% ekipa izgubilo sve duele u kvizu znanja. Nemoguće je da postoje dvije ekipe koje su izgubile u svim duelima jer te dvije ekipe kada se takmiče u kvizu znanja, jedna mora biti pobjednik, a u uslovu zadatka nema neriješenih rezultata. Imamo da je jedna ekipa ta koja čini 10% svih ekipa tj. $10\%\,x = 1$, gdje je x ukupan broj ekipa. Odatle dobijamo da je $x = 10$ tj, ukupan broj ekipa je 10.
2. Kako je $\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$, imamo da je $\sqrt{3}(x - y) = 5\sqrt{3}$, odnosno da je $x - y = 5$. Racionalisanjem imenioca razlomka $\frac{y}{\sqrt{2}}$ dobijamo $\frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y\sqrt{2}}{2}$. Tada imamo da je:
$\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{y\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 = 2{,}5\sqrt{2}$.

IX razred

1. Površina osnove pravilne četvorostrane prizme je B, a površina jedne bočne strane je 2 puta veća od površine osnove te prizme. Izraziti površinu i zapreminu te prizme u funkciji površine osnove B.
2. Jedno tjeme trougla je nula funkcije $y = 0{,}75x + 12$, drugo tjeme je presjek grafika funkcije $4x + 3y - 36 = 0$ sa apcisnom osom, a treće tjeme je presječna tačka grafika datih linearnih funkcija. Dokazati da je dati trougao pravougli i izračunati mu obim.

Rješenja:

1. Kako omotač čine 4 podudarna pravougaonika, a površina jednog pravougaonika je 2B, to je površina omotača jednaka $4 \cdot 2B = 8B$. Povr-

šina prizme je P = 2B + 8B = 10B. Osnovna ivica je a = $\sqrt{B}$ pa imamo da je površina jedne bočne strane a · H = 2B, odakle je visina prizme H = $\frac{2B}{a} = \frac{2B}{\sqrt{B}} = 2\sqrt{B}$. Zapremina prizme je V = B · H = 2B$\sqrt{B}$.

2. Nula funkcije $y = 0{,}75x + 12$ je $x = -16$, pa je jedno tjeme trougla sa koordinatama (–16, 0). Drugo tjeme je presjek apscise i grafika funkcije $4x + 3y - 36 = 0$, koje se dobija tako što u datu jednačinu uvrstimo $y = 0$, pa dobijamo $4x - 36 = 0$, odakle je $x = 9$, te je drugo tjeme trougla (9, 0). Eksplicitni oblik funkcije $4x + 3y - 36 = 0$ je $y = -\frac{4}{3}x + 12$, pa je presjek grafika datih funkcija rešenje jednačine $0{,}75x + 12 = -\frac{4}{3}x + 12$. Rešenje date jednačine je $x = 0$, pa je treće tjeme trougla (0, 12). Dužine stranica trougla su 15, 20 i 25. Dati trougao je pravougli, jer za njega važi Pitagorina teorema. Obim datog trougla je O = 60.

Radomir Božović

JEDAN ZADATAK – DVA RJEŠENJA

„Korisnije je riješiti jedan isti zadatak na više različitih načina, nego više zadataka na po jedan način. Ako se jedan isti zadatak riješi na više različitih načina, može se upoređivanjem rješenja utvrditi koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Na taj način se stiče i izgrađuje vještina rješavanja zadataka.“

W.W. Sawyer, Prelude to Mathematics

Zadatak 1: Baka je za svoje unučiće ispekla kiflice sa kremom. Jovan je prvi došao do bake, a pošto je bio prilično gladan, pojeo je trećinu svih kiflica i otišao. Potom je došao Marko, pojeo trećinu ostatka i izašao vani. Na kraju je naišla Jelica i pojela trećinu preostalog dijela. U korpi je ostalo još osam kiflica. Koliko kiflica je baka ispekla?

***Rješenje* 1**. Označimo ukupan broj kiflica sa x. Jovan je pojeo $\frac{x}{3}$ i ostalo je $(x-\frac{x}{3})$ kiflica. Marko je pojeo trećinu od ovog broja, a to je $\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3})$. Ostalo je $x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3})$. Od toga je trećinu pojela Jelica, što je $\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}))$, a ostalo je $x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3})-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}))$. Po uslovu zadatka dobijamo jednačinu:

$$x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3})-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}))=8. \qquad (*)$$

Sređivanjem izraza dobijamo:

$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{3}+\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3}-\frac{x}{3}+\frac{x}{9})=8$, odnosno $x-\frac{x}{3}-\frac{x}{3}+\frac{x}{9}-\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\frac{x}{9}-\frac{x}{27}=8$. Rješavajući posljednju jednačinu dobijamo da je $\frac{8x}{27}=8$, odnosno $x=27$. Dakle, baka je ispekla 27 kiflica.

***Rješenje* 2**. U jednačini (*) se izraz $x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3})$ pojavljuje na dva mjesta. Označimo taj izraz sa y, pa jednačina (*) postaje:

$y-\frac{1}{3}y=8$, odakle se lako dobija da je $y=12$. Sada rješavamo jednačinu:

$x-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-\frac{x}{3})=12$, iz koje se nakon sređivanja dobija $\frac{4x}{9}=12$, pa je $x=27$.

***Rješenje* 3.** Jovan je pojeo trećinu kiflica, što znači da su ostale dvije trećine svih kiflica, $\frac{2}{3}x$. Marko je pojeo jednu trećinu od dvije trećine $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}x$, pa je ostalo $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x$ kiflica. Nakon Jelice su ostale $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x$, odnosno $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x=8$. Rješavajući ovu jednačinu lako dobijamo da je $x=27$.

***Rješenje* 4.** Svaki od troje bakinih unučića je ostavio dvostruko više kiflica nego što je pojeo, jer je pojeo jednu trećinu, a ostavio dvije trećine. Ako je Jelica ostavila 8 kiflica, pojela je dvostruko manje, a to su 4 kiflice, pa su prije nje u korpi bile 8 + 4 = 12 kiflica. Dakle, Marko je ostavio 12 kiflica, a pojeo je dvostruko manje što je 6 kiflica, pa zaključujemo da je u korpi bilo 12 + 6 = 18 kiflica kada je Marko došao. Sada vidimo da je Jovan pojeo polovinu od 18 kiflica, a to je 9, što znači da je baka ispekla 9 + 18 = 27 kiflica.

Zadatak 2: Ako je x prirodan broj veći od 1 i $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$, izračunati: x, $x+\frac{1}{x}$ i $x-\frac{1}{x}$.

***Rješenje* 1**. Koristeći kvadrat binoma dobijamo:

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}=2+\frac{82}{9}=\frac{100}{9}=(\frac{10}{3})^2.$$

Kako je po uslovu zadatka x pozitivan broj, to je

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}. \quad (1)$$

Slično, iz

$$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9} - 2 = \frac{64}{9} = (\frac{8}{3})^2,$$

dobijamo da je $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$. (2)

Sabirajući jednakosti (1) i (2) dobijamo $2 \cdot x = \frac{10}{3} + \frac{8}{3} = \frac{18}{3} = 6$, pa je $x = 3$.

***Rješenje* 2**. Iz uslova zadatka $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$, dobijamo jednačinu $\frac{x^4+1}{x^2} = \frac{82}{9}$, iz koje se proizilazi $9x^4 - 82x^2 + 9 = 0$. Transformisaćemo dobijenu jednačinu (trinom ćemo rastaviti na činioce)

$$\begin{aligned} 9x^4 - 82x^2 + 9 &= 9x^4 - x^2 - 81x^2 + 9 = \\ &= x^2(9x^2 - 1) - 9(9x^2 - 1) \\ &= (9x^2 - 1)(x^2 - 9) \\ &= (x - 3)(x + 3)(3x - 1)(3x + 1), \end{aligned}$$

pa jednačina postaje: $(x - 3)(x + 3)(3x - 1)(3x + 1) = 0$. Odavde je $x = 3$ ili $x = -3$, $x = \frac{1}{3}$ ili $x = -\frac{1}{3}$. Jedino rješenje koje zadovoljava uslov da je x veći od 1 je $x = 3$, pa je $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, odnosno $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$.

***Rješenje* 3.** Posmatrajmo izraz $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{82}{9}$. Kako je, po uslovu zadatka, x prirodan broj veći od 1, to je izraz $\frac{x^4+1}{x^2}$ neskrativ razlomak, pa mora biti $x^4 + 1 = 82$, odnosno, $x^2 = 9$. Obje jednačine daju jedino rješenje $x = 3$, koje zadovoljava uslov $x > 1$, pa je $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ i $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$.

***Rješenje* 4.** Po uslovu zadatka je ($x \in N$ i $x > 1$), što znači da je $x^2 \geq 1$, pa je $0 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$. Koristeći ova dva uslova i jednakosti $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{82}{9} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{82}{9}$ i $\frac{82}{9} = x^2 + \frac{1}{x^2} \leq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{82}{9} - 1 \leq x^2$, zaključujemo da je $\frac{82}{9} - 1 \leq x^2 \leq \frac{82}{9}$, odnosno, $\frac{73}{9} \leq x^2 \leq \frac{82}{9}$. Dalje uočavamo da je $8 \leq x^2 \leq 10$, a iz ovoga proizilazi da je $2 < x \leq \sqrt{10}$. Kako je x prirodan broj mora biti $x = 3$. Odavde je $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ i $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$.

Radomir Božović, JU OŠ „Radojica Perović”, Podgorica

PISANA PRIPREMA ZA OGLEDNI ČAS

Škola:	OŠ „Pavle Rovinski" Podgorica
Integrisana nastava:	Matematika / Informatika
Nastavnice:	Mira Bušković i Slobodanka Papić
Razred:	VIII
Tema:	Površina trougla – integracija matematike i programiranja
Trajanje:	45 minuta
Ishodi učenja:	Učenici: • vizualizuju i provjeravaju površinu trougla kroz rješavanje konkretnih zadataka; • kreiraju i testiraju Micro:bit programe za crtanje trougla i različite načine izračunavanja površine trougla; • procjenjuju uspješnost timskog rada i vlastiti doprinos u rješavanju zadataka;
Nastavna sredstva:	• Računari sa internetom (za MakeCode i GeoGebru) • Micro:bit uređaji (ili simulacija u MakeCode-u i na telefonu) • Projektor Dodatni resursi: • https://wordwall.net – Platforma za kviz • https://www.geogebra.org/ – Za izradu zadataka • https://makecode.microbit.org/ - Direktan link za kodiranje

MOTO ČASA

„Trougao + Kod = Znanje u pokretu!"

Aktivnost 1

Uvod i provjera površine trougla u GeoGebri (12 min)

Metode i oblici rada: razgovor, demonstracija, podsticanje kritičkog mišljenja, istraživanje, individualni rad.

🎯 **Cilj: Podsjećanje na formulu i uvod u praktičnu primjenu.**

Čas prati PowerPoint prezentacija: „Gdje god da gledaš — TROUGAO je tu!"

1. Pitanje za uvodnu diskusiju:
   – Kako se računa površina trougla?
2. Vizuelna demonstracija:
   – Ilustracija različitih tipova trouglova i položaja visine.
   – Prikaz svakodnevnih primjera gdje se javlja trougao i površina trougla.

Proračun površine trougla u GeoGebri:

1. kada su date koordinate tjemena.
2. kada su poznate sve tri stranice.

Praktični dio uz korišćenje GeoGebre na računaru (PRILOG 1). Učenici koriste GeoGebru za vizualizaciju i provjeru rezultata. Jedan učenik demonstrira rješenje, dok ostali analiziraju postupak i postavljaju pitanja.

Aktivnost 2

Programiranje Micro:bit-a (15 min)

Metode i oblici rada: demonstracija, rješavanje problema, rad u paru i grupi.

Cilj: Primjena znanja kroz programiranje.

Programiranje u MakeCode okruženju (Blokovi)

KAKO FORMIRAMO GRUPE?

Prilikom ulaska u kabinet:

- Svaki učenik izvlači listić sa trouglom određene boje (plavi, žuti ili crveni).
- Oni koji imaju istu boju čine jednu grupu.

Broj listića odgovara broju učenika, tako da su grupe približno jednake (po broju učenika).

ZADATAK ZA GRUPE

- PowerPoint slajd sa zadacima (PRILOG 2).
- Svi članovi grupe rade samostalno na MakeCode platformi i pomažu jedni drugima u izvršenju zadatka.

KO JE PRVI?

- Grupa koja prva uspješno završi zadatak:
  1. Povezuje Micro:bit (ili prezentuju rješenje na telefonu).
  2. Demonstriraju rješenje pred ostalim grupama.

Aktivnost 3

Wordwall kviz (13 min)

Metode i oblici rada: kviz, grupni rad.

🎯 **Cilj: Provjera znanja i razumijevanja kroz interaktivni kviz.**

- Učenici rješavaju kviz „Otvori kutiju" u grupama.
- Kviz ima 15 pitanja i grupe odgovaraju redom tako što biraju jednu kutiju označenu brojem od 1 do 15.
- Ako grupa odgovori netačno, pitanje se zaključava.

  Kada prva sledeća grupa odgovori tačno, prethodno zaključana pitanja se otključavaju.
- Proglašenje najuspješnije grupe (motivacija kroz mini nagradu ili aplauz).

Završetak i evaluacija (5 min)

Metode i oblici rada: diskusija, refleksija, individualni rad.

Pitanja za razmišljanje:

- „Šta ste danas naučili?"
- „Koju vještinu ste danas prvi put koristili?"

✍ Listić za samoprocjenu (PRILOG 5).

Učenici ispunjavaju listić za samoprocjenu (tablica sa skalama od 1 do 5, kao i kratak osvrt na timski rad).

💡 „Trouglasti izazov sedmice" – svake sedmice novi zadatak koji učenici mogu riješiti pomoću:

- ➢ Micro:bit-a,
- ➢ GeoGebre ili
- ➢ papira i olovke.

☞ Objavljuje se svakog ponedjeljka.

☞ Rješava se individualno ili u paru.

☞ Rješenja se predaju do petka (digitalno ili ručno).

☞ Na kraju mjeseca – Zid znanja s najboljim rješenjima.

PRILOG 1:

Zadaci koji se rješavaju korišćenjem aplikacije GeoGebra

Zadatak1:

Tokom analize utakmice, trener fudbalskog tima proučava položaj trojice ofanzivnih igrača u ključnom napadu. Na osnovu GPS podataka, utvrđeno je da se igrači nalaze na sljedećim pozicijama:

- igrač A je na tački A (2, 1),
- igrač B je na tački B (6, 4),
- igrač C je na tački C (4, 7).

Izračunati površinu trougla koji čine ova tri igrača koristeći matematički softver GeoGebra.

Zadatak2:

Geometar mjeri nepravilnu poljoprivrednu parcelu koja ima oblik nejednakostraničnog trougla. Na osnovu terenskih podataka, utvrđene su dužine stranica:

$$a = 2{,}5\ km, \quad b = 3{,}8\ km \ \text{ i } \ c = 1{,}4\ km.$$

Izračunati površinu parcele koristeći matematički softver GeoGebra.

PRILOG 2:

Zadaci za programiranje na MakeCode platformi

Zadatak 1 (Kreativni prikaz trougla):

Napraviti program koji na ekranu iscrtava trougao koji trepće. Koristiti LED tačke da se nacrta trougao i "pause" i "clear screen" da bi animirali treptanje.

Zadatak 2 (Interaktivni trougao):

Napraviti program koji računa površinu trougla:

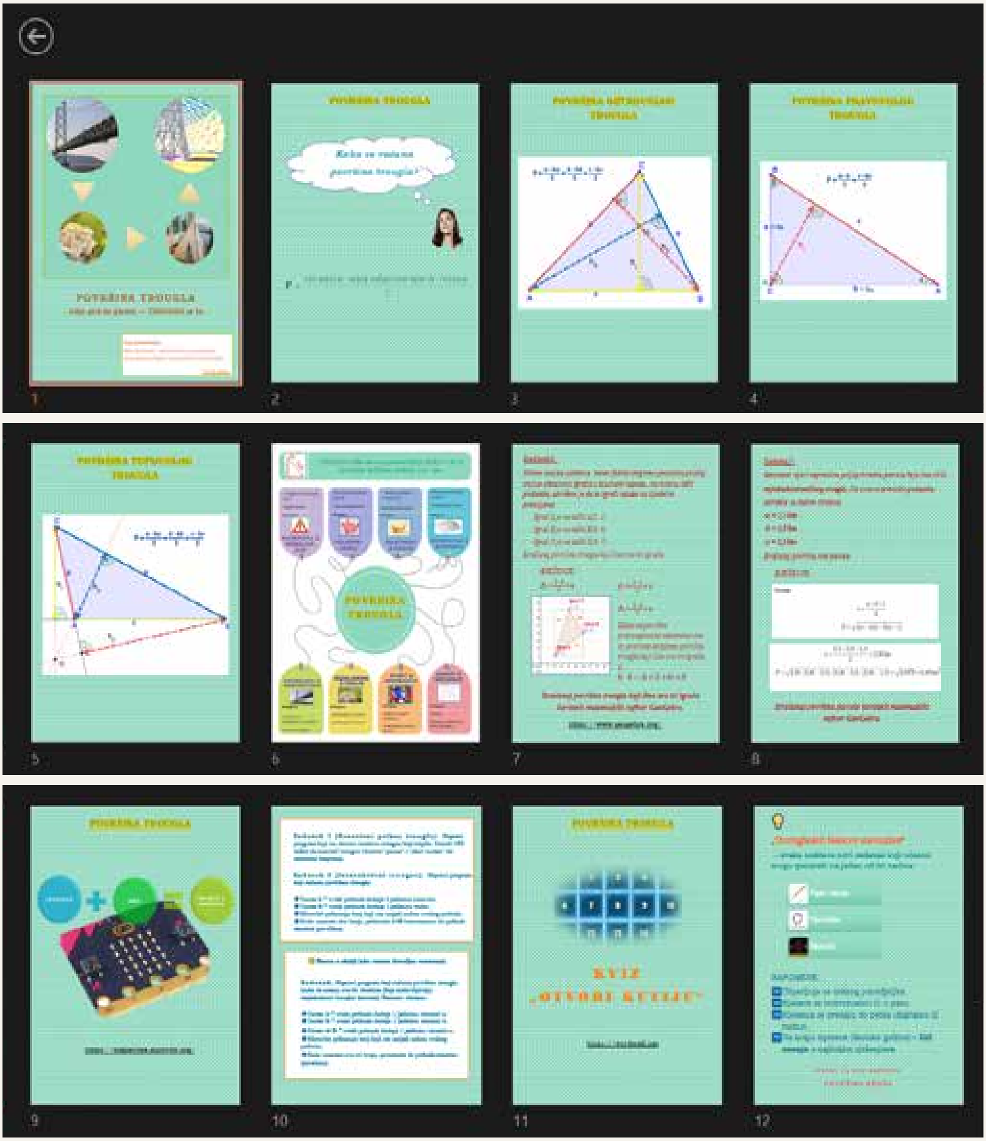
- Taster A = svaki pritisak dodaje 1 jedinicu osnovici.
- Taster B = svaki pritisak dodaje 1 jedinicu visini.
- Micro:bit prikazuje broj koji ste unijeli nakon svakog pritiska.
- Kada se unesu oba broja, treba pritisnuti A + B istovremeno da se prikaže rezultat (površina).

Heron u akciji (bonus zadatak):

Zadatak 3: Napraviti program koji računa površinu trougla kada se unesu sve tri stranice (koje zadovoljavaju nejednakost trougla) koristeći Heronov obrazac.

- Taster A = svaki pritisak dodaje 1 jedinicu stranici a.
- Taster B = svaki pritisak dodaje 1 jedinicu stranici b.
- Taster A + B = svaki pritisak dodaje 1 jedinicu stranici c.
- Micro:bit prikazuje broj koji ste unijeli nakon svakog pritiska.
- Kada unesete sva tri broja, protresite da se prikaže rezultat (površina).

PRILOG 3: **Slike slajdova iz prezentacije.**



PRILOG 4: Neka od pitanja na kvizu.

Mira Bušković, Slobodanka Papić, JU OŠ „Pavle Rovinski”, Podgorica

Štampanje ovog broja pomogli su:

DOMEN d.o.o.
PODGORICA

Imate prijatelje!
MTEL d.o.o.
PODGORICA

MINISTARSTVO
PROSVJETE,
NAUKE I
INOVACIJA

HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!

POZIV ZA NASTAVNIKE

Ove školske godine UNMCG i redakcija Dijagonale nagrađuju nakon izlaska svakog novog broja našeg časopisa, po pet nastavnika matematike koji prvi na mail adresu našeg udruženja udruznastmatem@gmail.com pošalju po:

– 2 zadatka za dodatnu nastavu za VI, VII, VIII i IX razred (ukupno 8 zadataka) s rešenjima ili

– pripremu za čas ili

– 10 zadataka za neki razred osnovne škole (VI, VII, VIII ili IX) sa predlogom zadataka za pismeni.

Zadaci i/ili pripreme za čas moraju biti u skladu s planom i programom za period do izlaska sledećeg broja Dijagonale.

Nagrada je 10 brojeva časopisa Dijagonala koje nastavnici mogu koristiti na časovima redovne, dopunske i dodatne nastave ili ih podijeliti talentovanim matematičarima. Zadatke nastavnici mogu sastavljati i sa učenicima u okviru dodatne nastave.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale” će biti besplatno podijeljen bibliotekama svih osnovnih škola u Crnoj Gori.

Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**" i „**Narodnoj knjizi**". Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **510-206991-61** kod CKB banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

www.unmcg.wordpress.com udruznastmatem@gmail.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >