



Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

# Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €



BROJ 30- GODINA 2025.

# Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „Dijagonala“, broj 30

Godina 2025.

Cijena: 1,50 €

---

Glavni urednik:	<i>mr Radomir Božović</i>
Odgovorni urednik:	<i>Danijela Jovanović</i>
Redakcija:	<i>Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Anđa Vujović, Milan Rosandić, Nikola Radojičić, Irena Pavićević, Nevena Ljujić</i>
Lektura:	<i>Milja Božović, prof.</i>
Korektura:	<i>Danijela Jovanović, prof.</i>
Priprema za štampu:	<i>Branko Gazdić</i>
Naslovna strana:	<i>Generisana uz pomoć vještačke inteligencije</i>
Tiraž:	<i>1000</i>
Štampa:	<i>„Studio Branko“ d.o.o. – Podgorica</i>

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala“ za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

## Sadržaj

Kongruencije su svuda oko nas .....	<b>3</b>
Zanimljivi primjeri korjenovanja .....	<b>7</b>
Zadaci za vježbu (iz programiranja) .....	<b>12</b>
Zadaci za vježbu .....	<b>16</b>
Odabrani zadaci .....	<b>27</b>
Takmičarski zadaci .....	<b>29</b>
Rješenja takmičarskih zadataka iz prošlog broja .....	<b>30</b>
U svijetu šifri - Morzeova azbuka .....	<b>35</b>
Priprema za realizaciju časa .....	<b>37</b>

# KONGRUENCIJE SU SVUDA OKO NAS

(nastavak iz prošlog broja)

## 3. Zadaci iz teorije brojeva

U zadacima koji slijede bavićemo se određivanjem ostatka pri dijeljenju dva cijela broja, dokazivanjem da je dati broj djeljiv, ili nije, nekim drugim cijelim brojem, određivanjem zadnjih cifara datog broja, nalaženjem NZD za cijele brojeve date u obliku stepena i slično.

U svim ovim zadacima potrebno je naći stepen osnove datog broja koji se, po mogućnosti, razlikuje za 1 od broja koji je djeljiv modulom. Kada to nije moguće, onda nalazimo stepen koji se razlikuje za 2 ili 3 ili 4, ... od broja djeljivog modulom, bitno je samo da je ta razlika što manja.

**Zadatak 1.** Odrediti ostatak pri dijeljenju broja  $2^{30}$  sa 13.

**Rješenje:** Posmatrajmo stepene osnove 2 datog broja:  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ ,  $2^4 = 16$ ,  $2^5 = 32$ ,  $2^6 = 64$ . Očigledno je da nam je zadnji stepen pogodan za dalji rad.

$$2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}, \text{ jer } 13 \mid 64 - (-1) = 65.$$

Korišćenjem **Posljedice 5**, imamo  $(2^6)^5 \equiv (-1)^5 \pmod{13}$ , odnosno  $2^{30} \equiv -1 \pmod{13}$ .

Kod ovakvih zadataka nastojimo da na desnoj strani dobijemo broj koji je veći ili jednak od nule, a manji od modula. Tako dobijen broj je ostatak pri dijeljenju datog broja modulom. Kako je u našem slučaju na desnoj strani negativan broj, on ne može biti ostatak, pa na osnovu **Primjedbe 3** dodaćemo desnoj strani kongruencije modul, te imamo:

$$2^{30} \equiv -1 + 13 = 12 \pmod{13}, 0 \leq 12 < 13. \text{ Dakle, traženi ostatak je } 12.$$

**Zadatak 2.** Naći ostatak pri dijeljenju broja  $2^{2025} - 3^{2025} + 4^{2025}$  brojem 7.

**Rješenje:**  $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7} \wedge 3^3 = 27 \equiv -1 \pmod{7} \wedge 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$

$$\Rightarrow (2^3)^{675} \equiv 1^{675} \pmod{7} \wedge (3^3)^{675} \equiv (-1)^{675} \pmod{7} \wedge (4^3)^{675} \equiv 1^{675} \pmod{7} \quad (\text{Koristili smo Primjedbu 5})$$

$$\Rightarrow 2^{2025} \equiv 1 \pmod{7} \wedge 3^{2025} \equiv -1 \pmod{7} \wedge 4^{2025} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2^{2025} - 3^{2025} + 4^{2025} \equiv 1 - (-1) + 1 = 3 \pmod{7} \quad (\text{Posljedica 1}).$$

Traženi ostatak je 3.

## 4 Dijagonala

---

**Zadatak 3.** Dokazati da je broj  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  djeljiv brojem 3.

**Dokaz:**  $2222 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 2^{5555} \pmod{3}$ . Kako je  $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod{3}$ , to je  $2^{5555} = (2^2)^{2777} \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \pmod{3}$ . Dalje je  $5555 \equiv 2 \pmod{3}$ , to je  $5555^{2222} = 2^{2222} \pmod{3}$ . Kako je  $2^2 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$ , to je  $2^{2222} = (2^2)^{1111} \equiv 1 \pmod{3}$ .

$$\text{Dakle, } 2222^{5555} + 5555^{2222} = 2 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$\text{Ostatak je } 0, \text{ pa } 3 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}.$$

**Zadatak 4.** Odrediti NZD svih brojeva oblika  $7^{2n} - 1, n \in \mathbb{N}$ .

**Rješenje:**

$$7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{48} \Rightarrow (7^2)^n \equiv 1^n \pmod{48} \quad (\text{Primjedba 5})$$

$$\Rightarrow 7^{2n} \equiv 1 \pmod{48} \wedge 1 \equiv 1 \pmod{48}$$

$$\Rightarrow 7^{2n} - 1 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{48} \quad (\text{Posljedica 1})$$

Dakle, svaki od datih brojeva je djeljiv sa 48. Kako je 48 najmanji iz tog skupa (za  $n = 1$  je  $7^{2 \cdot 1} - 1 = 48$ ), to oni ne mogu imati većeg djelioca. Broj 48 je traženi NZD.

**Zadatak 5.** Ako su  $k, m$  i  $n$  prirodni brojevi, tada

$$11 \mid 5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}. \text{ Dokazati.}$$

**Dokaz:**  $5^5 = 3125 \equiv 1 \pmod{11} \wedge 4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11} \wedge 3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow (5^5)^k \equiv 1^k \pmod{11} \wedge (4^5)^m \equiv 1^m \pmod{11} \wedge (3^5)^n \equiv 1^n \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 5^{5k} \equiv 1 \pmod{11} \wedge 4^{5m} \equiv 1 \pmod{11} \wedge 3^{5n} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 5^{5k} \equiv 5 \cdot 1 \pmod{11} \wedge 4^2 \cdot 4^{5m} \equiv 4^2 \cdot 1 \pmod{11} \wedge 3^{5n} \equiv 1 \pmod{11} \quad (\text{Posljedica 3})$$

$$\Rightarrow 5^{5k+1} \equiv 5 \pmod{11} \wedge 4^{5m+2} \equiv 16 \pmod{11} \wedge 3^{5n} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 5 + 16 + 1 = 22 \pmod{11} \quad (\text{Posljedica 2})$$

$$\Rightarrow 5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 22 - 22 = 0 \pmod{11}. \quad (\text{Primjedba 3})$$

Kako je ostatak 0, dokaz je završen.

**Zadatak 6.** Odrediti posljednje dvije cifre broja  $99^{2025}$ .

**Rješenje:** Kada se traži  $k$  posljednjih cifara nekog broja, onda je modul oblika  $10^k$ . Za dvije posljednje cifre je  $k = 2$ , a modul  $10^2 = 100$ , pa imamo:

$$\begin{aligned} 99 &\equiv -1 \pmod{100} \Rightarrow 99^{2025} \equiv (-1)^{2025} \pmod{100} \\ &\Rightarrow 99^{2025} \equiv -1 \pmod{100} \\ &\Rightarrow 99^{2025} \equiv -1 + 100 = 99 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Dati broj pri dijeljenju sa 100 daje ostatak 99, tj. posljednje dvije njegove cifre su 99.

**Zadatak 7.** Odrediti posljednju cifru broja  $7^{7^{7^7}}$ .

**Rješenje:** Ovdje je modul  $10^1 = 10$ , a  $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$ . Dalje je

$7 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 7^{7^7} \equiv (-1)^{7^7} = -1 \equiv -1 + 4 = 3 \pmod{4}$ ,  
jer je  $7^7$  neparan broj (završava se cifrom 3).

Na osnovu Teoreme 4(a) postoji  $k \in \mathbb{N}$ , takav da važi  $7^{7^7} = 4k + 3$ , a kako je  $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ , tada je  $7^{4k} \equiv 1^k = 1 \pmod{10}$ .

$$\text{Sada je } 7^{7^{7^7}} = 7^{4k+3} = 7^3 \cdot 7^{4k} \equiv 7^3 \cdot 1 = 343 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Posljednja cifra datog broja je 3.

## 4. Lijepa primjena kongruencije

Formula koja slijedi daje nam mogućnost da na osnovu datog datuma odredimo dan u sedmici koji je bio tog datuma.

Neka su:

$k$  – redni broj sedmičnog dana (nedjelji je pridružen broj 0, ponedjeljku – broj 1, ..., suboti – broj 6);

$d$  – datum u mjesecu;

$m$  – redni broj mjeseca, računajući sada mart kao prvi mjesec u godini, prema tome januar kao jedanaesti, a februar kao dvanaesti;

$c$  – broj vjekova u rednom broju godine za koji se traži sedmični dan;

$s$  – broj 1 za prestupnu godinu, a 0 inače;

$n$  – broj sačinjen od posljednje dvije cifre godine za koju se sedmični dan traži;

## 6 Dijagonala

---

$[x]$  – najveći cio broj od kojeg  $x$  nije manje ( $[0,25] = 0$ ,  $[3,1] = 3$ ,  $[5] = 5, \dots$ ).

Sa uvedenim oznakama važi:

$$k \equiv d + [2,6m - 0,2] + n + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor - 2c - (1 + s) \left\lfloor \frac{m}{11} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Izvođenje ove formule nije jednostavno!

**Primjer 13.** Njegoš je rođen 13. 11. 1813. godine. Odredimo koji je dan u sedmici bio tada.

Brojevi koji figurišu u prethodnoj formuli su:

$d = 13$ ,  $m = 9$  (računajući mart kao prvi mjesec, novembar je deveti)

$c = 18$ ,  $s = 0$  (1813. nije prestupna, jer  $4 \nmid 1813$ ),  $n = 13$ . Sada je

$$k \equiv 13 + [2,6 \cdot 9 - 0,2] + 13 + \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor - 2 \cdot 18 - (10) \left\lfloor \frac{9}{11} \right\rfloor \pmod{7}$$

$$= 13 + [23,2] + 13 + [3,25] + [4,5] - 36 - 1 \cdot [0,81] \pmod{7}$$

$$= 13 + 23 + 13 + 3 + 4 - 36 - 1 \cdot 0 \pmod{7} = 20 \pmod{7}$$

$$\equiv 20 - 14 = 6 \pmod{7}.$$

$k = 6$ . Njegoš je rođen u subotu.

## 5. Zadaci za samostalan rad

1. Dokazati na više načina da je broj  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  djeljiv sa 7 i 231.
2. Dokazati da se broj  $7^{7^7}$  završava sa 43.
3. Dokazati da je izraz  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  djeljiv brojem 7 za sve prirodne brojeve  $n$ .
4. Odrediti tri poslednje cifre broja  $1^{2025} + 2^{2025} + \dots + 999999^{2025} + 1000000^{2025}$ .
5. Dokazati da  $33 \mid 7^{2n} - 4^{2n}$ .
6. Dokazati da je broj  $(3 \cdot 7^9 - 7 \cdot 11^9)^{91} - ((3 \cdot 7^9)^{91} - (7 \cdot 11^9)^{91})$  djeljiv brojem 91.

---

<sup>1</sup> Redovni profesor, Fakultet za informacione tehnologije Univerziteta „Mediterran“ u Podgorici i Fakulteta za pomorstvo i turizam Univerziteta „Adriatik“ u Baru.

<sup>2</sup> Specijalista primijenjene matematike i računarskih nauka i magistar sajber bezbjednosti

Milan Rosandić, prof.

# ZANIMLJIVI PRIMJERI KORJENOVANJA

Korijeni su oblast matematike koja se u osnovnoj školi izučava u VIII razredu. U zadacima, u osnovnoj školi, korijeni su najčešće povezani sa stepenima i polinomima. Preporučujemo da naredne zadatke radite tek kada savladate polinome. Za početak navodimo nekoliko osnovnih svojstva korjenovanja:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = a, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

1. Odrediti vrijednost promjenljive  $x$ , ako važi:  $\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x+1}{x}} = 5$ .

**Rješenje:** Najprije posmatrajmo potkorjenu veličinu:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Sada, jednačina ima oblik:

$$\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 5.$$

Uvedimo smjenu:

$$\frac{1}{x} = m, \text{ pa dobijamo:}$$

$$m + \sqrt{1 + m} = 5.$$

Dalje, prebacujemo sve što nije u korjenu na drugu stranu i dobijamo:

$$\sqrt{1 + m} = 5 - m$$

Kvadriranjem cijelog izraza dobijamo:

$$1 + m = (5 - m)^2$$

Primjenjujući formulu za kvadrat binoma:  $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ , i transformišući izraz, dobijamo:

$$\begin{aligned}
 1 + m &= 25 - 10m + m^2 \\
 m^2 - 10m - m + 25 - 1 &= 0 \\
 m^2 - 11m + 24 &= 0 \\
 m^2 - 8m - 3m + 24 &= 0 \\
 m(m - 8) - 3(m - 8) &= 0 \\
 (m - 8)(m - 3) &= 0
 \end{aligned}$$

Proizvod dva broja jednak je nuli, ako je jedan od činilaca jednak nuli, tj.

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ili } B = 0, \text{ pa je:}$$

$$m - 8 = 0 \text{ ili } m - 3 = 0, \text{ odnosno } m = 8 \text{ ili } m = 3.$$

Sada se vraćamo u smjenu:  $\frac{1}{x} = m$ . Dobijamo da je  $\frac{1}{x} = 8$  ili  $\frac{1}{x} = 3$ , odakle

lako zaključujemo da su rješenja jednačine:  $x = \frac{1}{8}$ , odnosno,  $x = \frac{1}{3}$ .

Ako uvrstimo dobijena rješenja u polaznu jednačinu  $\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x+1}{x}} = 5$ ,

dobijamo: a)  $x = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{8}}} = 8 + \sqrt{\frac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{8}}} = 8 + \sqrt{9} = 8 + 3 = 11$ , pa

zaključujemo da  $x = \frac{1}{8}$  nije rješenje naše jednačine.

$$\text{b) } x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}}} = 3 + \sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5.$$

Iz svega navedenog zaključujemo da je rješenje,  $x = \frac{1}{3}$ .

2. Izračunati:

$$\left[ \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{30} + \sqrt{6}} \right]^{24}$$

**Rješenje:**

Date korjene ćemo djelimično korjenovati, rastavljanjem broja koji se nalazi kao potkorjena veličina, na proizvod dva broja od kojih je jedan potpun kvadrat, ako je to moguće, a ako nije potrudimo se da iskoristimo mogućnost izvlačenja zajedničkog činioca:

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6} \text{ i } \sqrt{30} = \sqrt{5 \cdot 6} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \quad \text{Sada imamo:}$$

$$\left[ \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{30} + \sqrt{6}} \right]^{24} = \left[ \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{5} + 1)} \right]^{24} = \left[ \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \right]^{24}.$$

Racionalisaćemo imenilac razlomka  $\frac{1}{\sqrt{5+1}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{5+1}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5^2-1^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ pa dobijamo jednostavniji}$$

izraz:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2}{\sqrt{5+1}} \right]^{24} &= \left[ \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{4} \right]^{24} = \left[ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]^{24} = \left[ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]^{3 \cdot 8} = \left[ \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 \right]^8 \\ &= \left[ \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{2^3} \right]^8. \end{aligned}$$

Koristeći formulu:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - ab(a-b)$$

Izraz  $(\sqrt{5}-1)^3$  postaje:

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}-1)^3 &= \sqrt{5}^3 - 1 - 3 \cdot \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5}-1) = 5\sqrt{5} - 1 - 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \\ &= 5\sqrt{5} - 1 - 3 \cdot 5 + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5} - 1 - 15 = 8\sqrt{5} - 16 = 8 \cdot (\sqrt{5}-2) \end{aligned}$$

Nastavljajući sa transformacijom našeg izraza dobijamo:

$$\left[ \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{2^3} \right]^8 = \left[ \frac{8 \cdot (\sqrt{5}-2)}{8} \right]^8 = (\sqrt{5}-2)^8.$$

Dalje je,

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}-2)^8 &= \left( (\sqrt{5}-2)^2 \right)^4 = \left( \sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5} + 4 \right)^4 = (9 - 4\sqrt{5})^4 = \\ &= \left[ (9 - 4\sqrt{5})^2 \right]^2 = (81 - 72\sqrt{5} + 80)^2 = (161 - 72\sqrt{5})^2 = \\ &= 25921 - 23184\sqrt{5} + 25920 = 51841 - 23184\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dakle, konačno dobijamo:

$$\left[ \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{30} + \sqrt{6}} \right]^{24} = 51841 - 23184\sqrt{5}$$

3. Izračunati vrijednost izraza:  $\sqrt{30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 + 1}$ .

**Rješenje:** Dati izraz zapišimo:

$$\sqrt{30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 + 1} = \sqrt{30 \cdot (30+1) \cdot (30+2) \cdot (30+3) + 1},$$

pa uvedimo smjenu  $30 = m$ . Dobićemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3) + 1} &= \\ \sqrt{m \cdot (m+3) \cdot (m+1) \cdot (m+2) + 1} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(m^2 + 3m) \cdot (m^2 + 2m + m + 2) + 1} = \\ & \sqrt{(m^2 + 3m) \cdot (m^2 + 3m + 2) + 1}. \end{aligned}$$

U posljednji korijen uvedimo novu smjenu:  $m^2 + 3m = t$ , pa dobijamo:

$$\begin{aligned} & \sqrt{t \cdot (t + 2) + 1} = \\ & \sqrt{t^2 + 2t + 1} = \\ & \sqrt{(t + 1)^2} = \\ & t + 1 = \\ & m^2 + 3m + 1, \end{aligned}$$

jer je bila smjena  $m^2 + 3m = t$ . Kako smo imali još jednu smjenu  $m = 30$ , konačno dobijamo:

$$m^2 + 3m + 1 = 30^2 + 3 \cdot 30 + 1 = 900 + 90 + 1 = 991.$$

4. Kolika je vrijednost izraza:  $\sqrt{30^3 + 40^3 + 50^3}$  ?

**Rješenje: I način**

$$\begin{aligned} \sqrt{30^3 + 40^3 + 50^3} &= \sqrt{(10 \cdot 3)^3 + (10 \cdot 4)^3 + (10 \cdot 5)^3} = \\ & \sqrt{10^3 \cdot 3^3 + 10^3 \cdot 4^3 + 10^3 \cdot 5^3} = \sqrt{10^3(3^3 + 4^3 + 5^3)} = \\ & \sqrt{10^3(27 + 64 + 125)} = \sqrt{10^3 \cdot 216} = \sqrt{10^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3}, \text{ jer je } 216 = 2^3 \cdot 3^3. \end{aligned}$$

Dalje je:

$$\begin{aligned} \sqrt{10^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} &= \sqrt{10^{2+1} \cdot 2^{2+1} \cdot 3^{2+1}} = \sqrt{10^2 \cdot 10 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \\ & \sqrt{10^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{(10 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (10 \cdot 2 \cdot 3)} = \\ & \sqrt{(10 \cdot 2 \cdot 3)^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \\ & 60 \cdot \sqrt{5 \cdot 2^2 \cdot 3} = 60 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 3} = 60 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = 120 \cdot \sqrt{15}. \end{aligned}$$

**II način:** Brojeve u korijenu zapišimo kao:

$$30^3 = (3 \cdot 10)^3 = 3^3 \cdot 10^3 = 27 \cdot 1000 = 27\,000$$

$$40^3 = (4 \cdot 10)^3 = 4^3 \cdot 10^3 = 64 \cdot 1000 = 64\,000$$

$$50^3 = (5 \cdot 10)^3 = 5^3 \cdot 10^3 = 125 \cdot 1000 = 125\,000.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \sqrt{30^3 + 40^3 + 50^3} &= \sqrt{27000 + 64000 + 125000} = \\ \sqrt{216000} &= \sqrt{216 \cdot 1000} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3 \cdot 1000} = \sqrt{6^3 \cdot 1000} = \sqrt{(6 \cdot 10)^3} = \\ \sqrt{60^3} &= \sqrt{60^2 \cdot 60} = \sqrt{60^2} \cdot \sqrt{60} = 60 \cdot \sqrt{60} = 60 \cdot \sqrt{4 \cdot 15} = \\ & 60 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 60 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = 120\sqrt{15}. \end{aligned}$$

5. Srediti izraz:  $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{32}}{\sqrt{18}}$ .

**Rješenje:** Transformišimo dati izraz kako slijedi:

$$\frac{\sqrt{27} + \sqrt{32}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 2}}{\sqrt{9 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

Racionalisaćemo, tj. pomnožiti cijeli razlomak sa  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ , pa dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6} + 4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{6} + 8}{6} = \\ \frac{3\sqrt{6}}{6} + \frac{8}{6} &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

6. Odrediti vrijednost promjenljive  $x$  u jednačini:  $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}\right)^x = 2$ .

**Rješenje:** Datu jednačinu ćemo uprostiti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}\right)^x &= \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 3}}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}\right)^x &= 2 \\ \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}\right)^x &= 2 \\ \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}\right)^x &= 2 \end{aligned}$$

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$  kratimo sa  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  i dobijamo:  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ .

Ovdje je potrebno obije strane znaka jednakosti svesti na istu osnovu, a poznavajući osnovna svojstva stepenovanja  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ , dobijamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x &= (2^{-1})^x \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 2^{-x}. \end{aligned}$$

Zaključujemo,  $2^{-x} = 2 = 2^1$ , odnosno,  $-x = 1$ , pa je rješenje naše jednačine  $x = -1$ .

Dr Goran Šuković

# ZADACI ZA VJEŽBU

1. Četiri učesnika Olimpijade iz informatike smještena su u jednom hotelu. Imaju takmičarske brojeve **1, 2, 3** i **4**. Kada su im na recepciji podijelili ključeve, objasnili su im šta znače oznake napisane na njima:
- **Prve dvije cifre** označavaju **broj sprata** na kojem je učesnik smješten. Dostupni spratovi su **8, 9, 10, 11** i **12**. Ako je broj sprata jednocifren, prva od te dvije cifre je nula (npr. sprat 8 je 08).
  - **Druge dvije cifre** su **broj sobe** u kojoj je učesnik smješten. Dostupne sobe su sa brojevima od **1 do 99**. Ako je broj sobe jednocifren, prva od te dvije cifre je nula (npr. soba 5 je 05).
  - Nakon cifara, na ključevima je sasvim desno jedno od dva latinična slova: **A** ili **D**. Slovo **A** označava ključ za **apartman**, a slovo **D** – ključ za **dvokrevetnu sobu**.

Napišite program koji čita ulazne podatke (tj. 4 oznake sa ključeva - kao što je prikazano ispod) i štampa 5 cijelih brojeva: spratove na kojima su takmičari, bez vodećih nula i koliko je takmičara u apartmanima.

**Primjer:**

Ulaz	Izlaz
0812A 1007A 1289D 1288A	8 10 12 12 3
0912D 0807D 0888D 1288D	9 8 8 12 0

2. Saša tvrdi da je uzeo dva prirodna broja  $a$  i  $b$  ( $0 < a < b < 10^6$ ), podijelio  $a$  sa  $b$ , i dobio konačan decimalni razlomak sa  $n$  cifara poslije decimalne tačke ( $n \leq 17$ ). Nažalost, ne sjeća se brojeva  $a$  i  $b$ . Provjerite da li se ovo moglo desiti, i ako jeste, navedite takve brojeve  $a$  i  $b$ . **Ulaz:** Prva linija ulaza sadrži cijeli broj  $n$  ( $1 \leq n \leq 17$ ). Druga linija ulaza sadrži  $n$  cifara

koje slijede poslije decimalne tačke u odgovoru. Garantuje se da posljednja cifra nije nula. **Izlaz:** Ako rješenje ne postoji, ispišite „NO”. Ako rješenje postoji, ispišite „YES”, a zatim dva cijela broja  $a$  i  $b$  koje je Saša koristio. Mora da važi nejednakost  $0 < a < b < 10^6$ . Ako postoji više odgovarajućih rješenja, ispišite bilo koje od njih.

Ulaz	Izlaz
1 2	YES 1 5
2 69	YES 69 100
3 001	YES 1 1000

**Rješenje:** Tražićemo uzajamno proste brojeve  $a$  i  $b$ . Neka je  $c$  broj formiran nizom cifara iza decimalne tačke. Tada važi sljedeća jednakost:  $c/10^n = a/b$ .

Dakle, da bismo pronašli  $a$  i  $b$ , potrebno je pronaći sve zajedničke djelioce brojeva  $10^n$  i  $c$ , a zatim tim djeliocima podijeliti imenilac i brojilac. Napomena: jedini zajednički djeliocima mogu biti brojevi 2 i 5. Ostaje da se provjeri da li su dobijena dva broja manja od  $10^6$ . Alternativno, može se pronaći najveći zajednički djelilac (**NZD**) brojeva  $c$  i  $10^n$  i tim brojem skratiti razlomak da bi se dobili brojevi  $a$  i  $b$ .

3. Ana je nacrtala pravougli trougao i traži njegovu površinu. Zna dužinu hipotenuze i visinu spuštenu na nju. Pomozite Ani da izračuna površinu takvog trougla, ili joj recite da takav trougao ne postoji. **Ulaz:** Prva linija ulaza sadrži jedan cijeli broj  $c$  ( $1 \leq c \leq 10^4$ ) — dužinu hipotenuze. Druga linija ulaza sadrži jedan cijeli broj  $h$  ( $1 \leq h \leq 10^4$ ) — dužinu visine spuštene na hipotenuzu. **Izlaz:** Ispišite površinu trougla. Ako takav trougao ne postoji, ispišite  $-1$ .

**Primjer:**

Ulaz	Izlaz
7 3	10.5
10 6	-1

**Rješenje:** Ako je  $2 \cdot h > c$ , onda je odgovor  $-1$ , inače je  $c \cdot h / 2$ .

4. Naučnici su otkrili novu vrstu bakterije i započeli su sprovođenje eksperimenata kako bi je proučili. U jednom od eksperimenata, postavili su kolo-

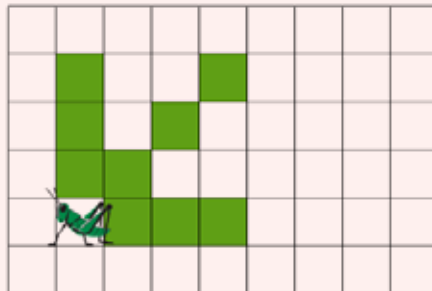
niju bakterije na beskonačnu mrežu, i ispostavilo se da se širi svake sekunde. U svakoj parnoj sekundi, kolonija se širi u osam smjerova, što znači da zauzima ćelije susjedne zauzetim, i to ortogonalno (gore, dolje, lijevo, desno) i dijagonalno, ako te ćelije već nijesu zauzete. U neparnim sekundama, širi se samo u četiri smjera, zauzimajući ćelije susjedne zauzetim samo ortogonalno. Pomozite naučnicima da odrede koliko ćelija zauzima kolonija bakterije u  $k$ -toj sekundi eksperimenta, s obzirom na to da je na mrežu postavljena u prvoj sekundi. **Ulaz:** Prva linija ulaza sadrži cijeli broj  $k$  ( $1 \leq k \leq 10^8$ ) — vrijeme u sekundama kada naučnici žele znati koliko ćelija zauzima kolonija bakterije. **Izlaz:** Ispišite jedan broj — broj ćelija koje zauzima kolonija bakterije u  $k$ -toj sekundi eksperimenta.

**Primjer:**

Ulaz	Izlaz
1	1
2	9
3	21
4	45
5	69

**Rješenje:** Potrebno je uočiti pravilo kako se popunjavaju ćelije.

5. U donjem lijevom uglu pravougaone mreže dimenzija  $n \times m$  nalazi se  $k$ -skakavac. U jednom potezu,  $k$ -skakavac se po tabli pomjera desno, gore ili desno-gore dijagonalno, ne više od  $k$  polja. Potrebno je premjestiti  $k$ -skakavca u gornji desni ugao table, u polje  $(n, m)$ . Na slici su prikazani mogući skokovi  $k$ -skakavca za  $k = 3$ .



Koliki je minimalni broj poteza potreban da se  $k$ -skakavac premjesti iz polja  $(1, 1)$  u polje  $(n, m)$ ? **Ulaz:** U prvoj liniji su data tri cijela broja  $n$ ,  $m$  i  $k$  – dimenzije stranica mreže i maksimalan broj polja za koje se  $k$ -skakavac može pomjeriti, respektivno ( $1 \leq n, m, k \leq 10^9$ ). **Izlaz:** Štampati

jedan broj – minimalni broj poteza potreban za premještanje k-skakavca iz polja (1, 1) u polje (n, m).

**Primjer:**

Ulaz	Izlaz
9 8 5	3
2 2 1	1

6. Ana voli riječi koje se sastoje od istih slova. Za svoj rođendan, dobila je riječ koja se sastoji od malih slova. Sada želi da iskoristi dio (moguće i sva) slova te riječi i da dobije novu riječ koja se sastoji samo od istih slova. Štaviše, Ana želi da dobijena riječ bude maksimalne dužine. Formalnije, dat je niz malih slova. Odredite najduži podniz koji se sastoji od identičnih simbola. Obratite pažnju: traženi niz ne mora biti sastavljen od uzastopnih simbola (ne moraju biti susjedni). Napišite program koji štampa traženu riječ. **Ulaz:** Sa jedine linije standardnog ulaza čita se string, sastavljen od malih engleskih slova – to je riječ koju je Ana dobila za rođendan. **Izlaz:** na jedinoj liniji standardnog izlaza štampajte **traženi podniz identičnih slova**. Ako postoji **više takvih** nizova iste maksimalne dužine, štampajte onaj koja je **manji leksikografski**, tj. onaj niz čije je slovo **bliže početku abecede**.

**Primjer:**

Ulaz	Izlaz
bbabab	bbbb
ayzyayzz	Yyy
cccccc	cccccc

7. Dat je niz elemenata koji su cifre, a njegov posljednji element je znak tačka (.'.'). Nulti odsječak nazivamo dio datog niza koji se sastoji od susjednih elemenata, pri čemu su svi ti elementi nule, a prethodni (ako postoji) i sljedeći elementi tog odsječka nijesu nule. Napišite program koji učitava dati niz, zamjenjuje svaki nulti odsječak (ako takav postoji) sa jednom nulom i štampa novi niz bez završne tačke.

**Primjer:**

Ulaz	Izlaz
00560770002000002.	0560770202

**ZADACI ZA VJEŽBU****V razred**

**Sabiranje i oduzimanje u skupu N.**  
**Jednačine sa sabiranjem i oduzimanjem u skupu N.**  
**Množenje i dijeljenje u skupu N**

**I grupa**

- Izračunati, pa provjeriti rezultat: a)  $7624 + 21\ 856$ ; b)  $31\ 705 - 28906$ .
- a) Zbir brojeva  $8\ 146$  i  $21\ 720$  smanjiti za  $5\ 999$ .  
b) Razliku brojeva  $15\ 720$  i  $10\ 840$  uvećati za  $3\ 778$ .
- Riješiti jednačine i nejednačine:  
a)  $x + 9\ 700 = 15\ 200$ ; b)  $x - 3\ 780 = 5\ 600$ ; c)  $4\ 280 - x = 3\ 150$ ;  
d)  $x + 870 \leq 2\ 100$ ; e)  $x - 3\ 450 > 750$ ; f)  $1\ 800 - x \leq 780$ .
- a) Izračunati i provjeriti rezultat:  
1)  $81\ 560 : 4$ ; 2)  $3\ 756 \cdot 9$ ; 3)  $38\ 700 : 25$ ; 4)  $1\ 734 \cdot 27$ .  
b) Zapisati u obliku  $a = b \cdot k + r$ , ako je  $a = 12303$  i  $b = 5$ .
- a) Zbir brojeva  $1\ 248$  i  $8\ 156$  smanjiti 4 puta.  
b) Izračunati vrijednost izraza:  $7\ 154 \cdot 6 - 81\ 720 : 3$ .  
c) Izračunati:  $x : (y : 100)$  ako je  $x = 36764 : 13$  i  $y = 15400 : 11$ .
- Anketiranje građana je obavljeno u tri grada. U prvom gradu je anketirano  $1\ 227$  građana, a u drugom 2 puta više. U trećem gradu anketirano je 3 puta manje nego u drugom. Koliko je ukupno građana anketirano?

**II grupa**

- Riješiti jednačine i nejednačine:  
a)  $5\ 000 - (x + 154) \geq 2\ 700$ ; b)  $(40\ 404 - 404) + (x - 4) < 44\ 040$ ;  
c)  $(x + 620) - 1\ 200 \leq 570$ ; d)  $3\ 270 - (x + 600) \leq 520$ .
- a) Koji je broj za toliko veći od broja  $7\ 780$  za koliko je broj  $1\ 756$  manji od  $2 \cdot 10^3$ ?  
b) Ako od zbira brojeva  $1\ 256$  i  $444$  oduzmemo neki broj, razlika nije veća od broja  $888$ . Odrediti moguće vrijednosti nepoznatog broja.
- a) Od trostruke vrijednosti zbira brojeva  $7\ 156$  i  $877$  oduzeti količnik brojeva  $36\ 112$  i  $6$ .  
b) Izračunati  $(a - 16 \cdot b) : 100 + c$  ako je:  
 $a = 36\ 544 - 77\ 248 : 17$ ,  $b = 125$  i  $c = 9\ 813 \cdot 23 \cdot 0 \cdot 77$ .

4. a) Odrediti djeljenik  $a$ , ako je količnik  $k = 159$ , djelilac  $b = 8$ , a ostatak  $r = 5$ . Za koliko možemo smanjiti djeljenik, a da količnik ostane nepromijenjen?  
b) Učenik je podijelio neki broj sa 63 i dobio količnik  $k$  i ostatak 59. Koji ostatak bi dobio da je taj broj podijelio sa 21?
5. Trener je za svoj klub kupio 15 majica, 19 peškira i 10 lopti i za sve to platio 1210 eura. Ako je cijena lopte 58 eura i peškira 15 eura, kolika je cijena jedne majice?
6. Jedan brod je prešao 440 km, a drugi 620 km. Drugi brod je plovio 9 časova duže. Koliko vremena je plovio svaki brod ako su se kretali istom prosječnom brzinom?

### Prijedlog drugog pismenog zadatka

#### I grupa

1. a) Riješiti jednačinu:  $i) 720 + (x - 325) = 1\ 200$ ;  $ii) 1\ 820 - x = 798$ .  
b) Ako od nepoznatog broja oduzmemo 890 razlika nije veća od 1 210. Odrediti moguće vrijednosti nepoznatog broja.
2. a) Izračunati vrijednost izraza:  $35\ 203 : 7 - 217 \cdot 8$ .  
b) Količnik brojeva 9 672 i 26 uvećati za proizvod brojeva 1 807 i 5.
3. a) Odrediti djeljenik  $a$ , ako je količnik  $k = 177$ , djelilac  $b = 9$  i ostatak  $r = 2$ .  
Za koliko možemo povećati djeljenik, a da količnik ostane isti?  
b) Ako je:  $a = 7\ 000 - 525 \cdot 4$ ,  $b = (8\ 700 + 2\ 300) : 5$   
 $c = (7\ 200 - 1\ 800) : 4 + (5\ 200 - 3\ 800) \cdot 5$ , izračunati  $a + (c - b)$ .
4. Građevinsko preduzeće je u martu mjesecu asfaltiralo 12 km puta, a u aprilu 9 km.  
a) Koliko su metara puta asfaltirali dnevno ako je ukupno bilo 42 radna dana?  
b) Koliko je dana preduzeće radilo u martu, a koliko u aprilu?

#### II grupa

1. a) Riješiti jednačine:  $i) x - 1\ 258 = 892$ ;  $ii) 1\ 100 - (x + 460) = 355$ .  
b) Ako broj 805 saberemo sa nekim brojem, zbir nije manji od 1 240. Odrediti moguće vrijednosti nepoznatog broja.
2. a) Izračunati vrijednost izraza:  $1\ 806 \cdot 7 + 32\ 406 : 6$ .  
b) Proizvod brojeva 1 208 i 9 smanjiti za količnik brojeva 21 105 i 5.
3. a) Odrediti djeljenik  $a$ , ako je količnik  $k = 156$  djelilac  $b = 7$  ostatak  $r = 3$ .  
Za koliko možemo smanjiti djeljenik, a da količnik ostane isti?

b) Ako je:  $a = 9\ 250 : 25 + 36$ ,  $b = 102 \cdot 22$  i  $c = 2 \cdot 10^3$ , izračunati  $(b + 56) \cdot (c : a)$ .

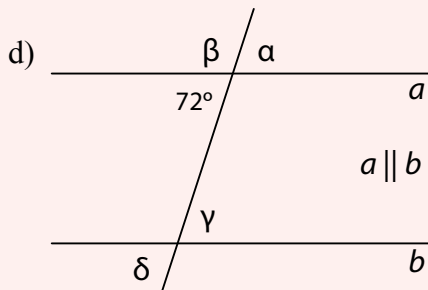
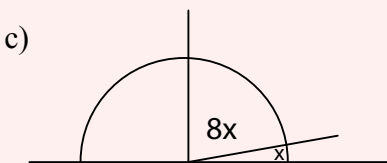
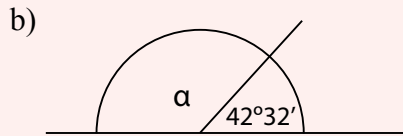
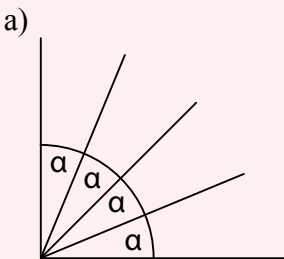
4. Iz dva mjesta međusobno udaljena 1 200 km kreću istovremeno u susret jedan drugom dva automobila. Brzina jednog od njih je 45 km/h. Poslije 8 časova vožnje do susreta im je ostalo 120 km. Kolika je brzina drugog automobila?

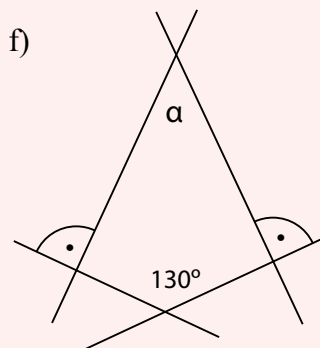
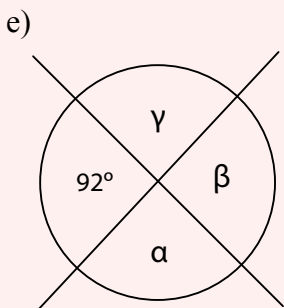
**Stojan Kilibarda, JU OŠ „Radojica Perović”, Podgorica**

**VI razred**

**Uglovi. Razlomci**

- Zapisati u traženim mjernim jedinicama:
  - $4^\circ = \underline{\hspace{1cm}}'$
  - $180'' = \underline{\hspace{1cm}}'$
  - $15' = \underline{\hspace{1cm}}''$
  - $39600'' = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$
  - $7' = \underline{\hspace{1cm}}''$
  - $7256'' = \underline{\hspace{1cm}}^\circ \underline{\hspace{1cm}}' \underline{\hspace{1cm}}''$
  - $11000'' = \underline{\hspace{1cm}}^\circ \underline{\hspace{1cm}}' \underline{\hspace{1cm}}''$
- Dati su uglovi  $\alpha = 143^\circ 24' 44''$  i  $\beta = 59^\circ 15'$ . Odrediti:
  - $\alpha - \beta$ ;
  - $2 \cdot \beta + \alpha$ ;
  - $\beta : 2$ ;
  - $\alpha : 4$ .
- Dat je ugao  $\alpha = 32^\circ 22' 53''$ . Odrediti mjeru njemu:
  - komplementnog;
  - suplementnog;
  - unakrsnog;
  - uporednog ugla.
- Ugao  $\alpha$  je za 3225' manji od svog komplementnog ugla. Izračunati ugao suplementan uglu  $\alpha$ .
- Ugao  $\alpha$  je 5 puta veći od njemu suplementnog ugla  $\beta$ . Odrediti te uglove.
- Odrediti uporedne uglove  $\alpha$  i  $\beta$  ako je  $\alpha$  za  $24^\circ$  veći od  $\beta$ .
- Odrediti mjere uglova sa slike:





8. Odrediti uglove sa paralelnim kracima  $\alpha$  i  $\beta$  ako je:
  - a) njihov zbir  $202^\circ 13'$ ;      b)  $\alpha$  dva puta manji od  $\beta$ .
9. Zbir dva unakrsna ugla je  $113^\circ$ . Odrediti mjere tih uglova.
10. Dvije prave se sijeku tako da je zbir tri od ta četiri ugla jednak  $260^\circ$ . Odrediti veličinu tih uglova.
11. a) Odrediti  $\frac{3}{5}$  od broja 50;      b) Od kojeg broja  $\frac{3}{4}$  iznose 75?
12. Od ukupno 25 km, biciklista je prešao prvog dana  $\frac{3}{5}$  puta, a drugog dana  $\frac{1}{2}$  ostatka. Koliko mu je kilometara još ostalo da pređe?
13. Darko je dobio 280 € za rođendan.  $\frac{3}{7}$  novca je dao svojoj sestri, a potrošio je  $\frac{3}{5}$  ostatka. Koliko mu je ostalo?
14. Biciklista je prešao  $\frac{2}{9}$  puta i ostalo mu je još 14 km. Koliki je cijeli put?
15. Vozeći automobil Miloš je za 3 dana prešao 350 km. Prvog dana prešao je  $\frac{2}{7}$  puta, drugog dana  $\frac{1}{5}$  ostatka puta. Koliko je Miloš prešao trećeg dana?

## Prijedlog drugog pismenog zadatka

### I grupa

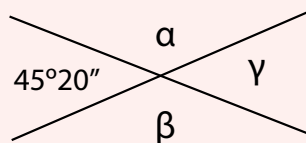
1. Ako je  $\alpha = 20^\circ 50' 40''$ , odrediti ugao koji je njemu:
  - a) suplementan;    b) komplementan;    c) uporedan;    d) unakrsan.
2. a) Uglovi  $\alpha$  i  $\beta$  su uglovi sa paralelnim kracima. Naći mjere uglova  $\alpha$  i  $\beta$  ako je  $\beta$  pet puta manji od ugla  $\alpha$ .
  - b) Odrediti mjere uglova  $\alpha$  i  $\beta$  ako su oni komplementni i ugao  $\alpha$  je za  $20^\circ$  veći od ugla  $\beta$ .

## 20 Dijagonala

3. a) Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  uglovi sa normalnim kracima i ugao  $\alpha = 45^\circ 20''$ . Odrediti ugao  $\beta$  ako je on:

i) oštar;      ii) tup.

- b) Izračunati mjere uglova sa slike.



4. a) Izračunati  $\frac{2}{5}$  broja 15.

- b) Nakon što je biciklista prešao  $\frac{3}{8}$  puta ostalo mu je još 360 km. Kolika je ukupna dužina puta?

### II grupa

1. Ako je  $\alpha = 50^\circ 20' 40''$  odrediti ugao koji je njemu:

a) suplementan; b) komplementan; c) uporedan; d) unakrsan.

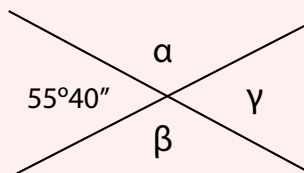
2. a) Uglovi  $\alpha$  i  $\beta$  su uglovi sa paralelnim kracima. Naći mjere uglova  $\alpha$  i  $\beta$  ako je  $\beta$  devet puta manji od ugla  $\alpha$ .

b) Odrediti mjere uglova  $\alpha$  i  $\beta$  ako su oni uporedni i ugao  $\alpha$  je za  $50^\circ$  veći od ugla  $\beta$ .

3. a) Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  uglovi sa normalnim kracima i ugao  $\alpha = 55^\circ 40''$ . Naći ugao  $\beta$  ako je on:

i) oštar;      ii) tup.

- b) Izračunati mjere uglova sa slike.



4. a) Izračunati  $\frac{3}{5}$  broja 15.

- b) Nakon što je Marko pojeo  $\frac{5}{8}$  torte, ostalo mu je još 360 g. Kolika je ukupna masa torte?

Ivana Bogojević, JU OŠ „Milorad Musa Burzan“, Podgorica

### VII razred

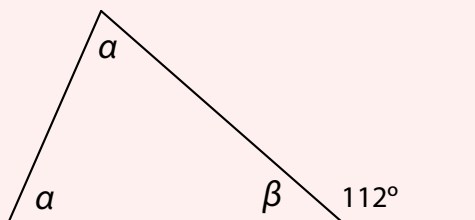
#### Jednačine i nejednačine u skupu Z. Trougao.

1. Riješiti jednačine: a)  $11 - 3x = -(-2)$ ; b)  $-2 = -8 - 3(x - 2)$ ;  
c)  $(4x - 24) : (-2) + 5 = -4$ .

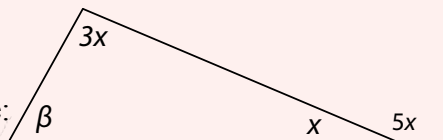
2. Riješiti nejednačine:  
a)  $-17 - 4x \geq -25$ ; b)  $8 - 2(x - 5) < 3 - (x - 17)$ ; c)  $\frac{2x-3}{5} \leq -7$ .
3. Ako petostruku vrijednost jednog broja podijelimo sa 6 dobićemo zbir brojeva  $-7$  i  $-13$ . Zapisati jednačinu i odrediti nepoznati broj.
4. U trouglu ABC unutrašnji ugao kod tjemena A iznosi  $\frac{1}{8}$  susjednog spoljašnjeg ugla, a ugao kod tjemena B jednak je susjednom spoljašnjem uglu. Odrediti sve unutrašnje i spoljašnje uglove tog trougla. Kakav je trougao na osnovu uglova? Uporediti stranice.
5. Jedan oštar ugao pravouglog trougla iznosi  $\frac{7}{11}$  drugog oštrog ugla. Uporediti katete.
6. Ako je u trouglu ABC stranica  $AB = 9 \text{ cm}$  i  $BC = 19 \text{ cm}$ , odrediti dužinu treće stranice ako znamo da  $11|AC$ .
7. Bisektrise iz tjemena A i C jednakokrakog trougla ( $AC = BC$ ) sijeku se u tački O. Ako je  $\sphericalangle AOC = 110^\circ$ , dokazati da je krak manji od osnovice.
8. Ako je ugao na osnovici jednak  $\frac{2}{5}$  ugla pri vrhu jednakokrakog trougla ABC ( $AC = BC$ ), odrediti oštar ugao koji grade prava koja sadrži visinu povučenu iz tjemena B na stranicu AC i simetrala ugla A.
9. Neka je trougao ABC pravougli ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ) sa jednim oštrim uglom od  $66^\circ$ . Izračunati ugao koji grade simetrala pravog ugla i visina iz tjemena pravog ugla na hipotenuzu.
10. Dat je pravougli trougao ABC. Na produžetku hipotenuze AB uočiti tačke S i T tako da je  $CA = AT = BS$ . Izračunati  $\sphericalangle SCT$ .
11. Duž CH je visina pravouglog trougla sa pravim uglom kod tjemena C. Ako je hipotenuza  $AB = 12 \text{ cm}$ ,  $\sphericalangle CAH = 30^\circ$  i  $O_{CBH} = 14 \text{ cm}$  odrediti dužinu visine CH.
12. Dat je jednakokraki trougao ABC ( $AC = BC$ ). Ako je AK težišna duž dužine  $3 \text{ cm}$ , dužina osnovice trougla ABC  $4 \text{ cm}$  i obim trougla  $ABK$   $O_{ABK} = 13 \text{ cm}$ , odrediti obim trougla ABC.
13. Dokazati da je duž koja spaja tjeme trougla s bilo kojom tačkom naspramne stranice manja od poluobima.
14. Na visini AD koja odgovara osnovici BC jednakokrakog trougla ABC uočena je tačka M. Dokazati da je  $MB = MC$ .
15. Data je duž AB i proizvoljna tačka M na simetrali te duži. Dokazati da je tačka M podjednako udaljena od krajeva duži AB.
16. Dokazati da je zbir težišnih duži veći od  $\frac{3}{4}$  njegovog obima.

**Prijedlog drugog pismenog zadatka****I grupa**

- Riješiti: a) jednačinu  $x : (-2) - 3 = -2$ ;  
b) nejednačinu  $-3 + x \cdot (-2) \leq -7$ .
- Bisektrise povučene iz tjemena A i B trougla ABC sijeku se u tački O. Odrediti  $\sphericalangle AOB$  ako je  $\sphericalangle A = 55^\circ$ , a  $\sphericalangle B = 95^\circ$ . Izračunati mjere svih unutrašnjih i spoljašnjih uglova trougla ABC i uporediti njegove stranice.
- a) Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je četiri puta manji od ugla na osnovici. Izračunati uglove trougla. Šta je duže: krak ili osnovica?  
b) Da li osnovica jednakokrakog trougla može biti 18 cm, ako je njegov obim trougla 32 cm? Objasniti!
- a) Odrediti sve nepoznate uglove sa slike:  
b) Mjerni brojevi stranica trougla su prirodni brojevi i dvije stranice su dužina 5 cm i 35 cm. Koliko može iznositi dužina treće stranice c, ako  $7|c$ ?
- a) Unutrašnji ugao kod tjemena A pravouglog trougla ABC (prav ugao je u tjemenu C) je za  $60^\circ$  manji od susjednog spoljašnjeg ugla. Odrediti dužinu stranice BC ako je  $AB = 10$  cm.  
b) Odrediti unutrašnje uglove jednakokrakog trougla ako simetrale uglova na osnovici obrazuju ugao od  $110^\circ$ .

**II grupa**

- Riješiti: a) jednačinu:  $2 + x : (-8) = 48 : (-6) + |-7 - 2|$ ;  
b) nejednačinu:  $-3 - 3x \leq -18 : 6 - 48 : (-8)$ .
- Odrediti oštre uglove pravouglog trougla  $\alpha$  i  $\beta$ , ako veličina ugla  $\alpha$  iznosi  $\frac{2}{7}$  ugla  $\beta$ . Uporediti stranice tog trougla.
- a) Dvije stranice trougla su 3 cm i 43 cm a dužina treće stranice je prirodan broj djeljiv sa 5.  
Odrediti dužinu treće stranice.  
b) Odrediti sve nepoznate uglove sa slike:
- Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je 2 puta manji od ugla na osnovici. Pod kojim uglom se sijeku bisektrise ugla na osnovici i ugla pri vrhu tog trougla?
- a) Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom u tjemenu C.



Ako je spoljašnji ugao  $\beta_1 = 120^\circ$  izračunati dužinu stranice AB, ako je  $BC = 12 \text{ cm}$ .

b) Dužina kraka AC jednakokrakog trougla ABC je 6 cm, a dužina osnove je 3 puta manja od kraka. Naći obim  $\triangle BKC$  ako je  $BK = 9 \text{ cm}$  težišna duž trougla.

**Marko Bogojević, JU OŠ „Milorad Musa Burzan“, Podgorica**

## VIII razred

### Stepenovanje. Polinomi. Funkcija direktne proporcionalnosti

- Brojeve iz skupa  $A = \left\{125, \frac{1}{8}, -\frac{27}{216}\right\}$  zapisati u obliku stepena čiji je izložilac 3, a brojeve iz skupa  $B = \{1, 64, 512\}$  zapisati u obliku stepena čija je osnova 2.
- Izračunati vrijednost izraza: a)  $3 \cdot (-5)^3 - 22 \cdot 1^{22} + 9 \cdot 3^4$ ;  
b)  $20 \cdot 10^0 + 7 \cdot (-2)^2 - 6^3 : 4$ ; c)  $\sqrt{169} \cdot 3 - 2^3 \cdot (-1)^5 + \sqrt{625} : 5^2$ .
- Uprostiti izraze: a)  $\frac{x^5 \cdot x^8}{x^3 \cdot x^6 \cdot x^2}$ ; b)  $\frac{(-y^3)^4}{y^2 \cdot y^5}$ ; c)  $(-z)^3 \cdot \frac{(-z^4)^3 \cdot z^5}{z^6}$ .
- Rastaviti na proste činioce polinome:  
a)  $28m^2n + 42m^3n^2 - 4mn - 6m^2n^2$ ;  
b)  $12x^2y^2 - 16x^2y^4 - 20x^4y^5$ .
- Izračunati na što jednostavniji način, primjenjujući formulu za razliku kvadrata i rastavljanje izraza na činioce:  
a)  $\frac{8,12^2 - 1,88^2}{40,6^2 - 9,4^2}$ ; b)  $5a^2b^3 - 10a^2b^2 + 15a^3b^2$ , za  $a = 2$  i  $b = 3$ .
- Ako su dati polinomi:  $A = 3x^2 + 2x + 4$ ,  $B = 2x^2 - x + 1$  i  $C = 3x - 2$ , odrediti: a)  $A + B$ ; b)  $A - B$ ; c)  $A \cdot C$ ; d)  $B \cdot C - 2A$ .
- Za koji trinom M je tačna jednakost:  
a)  $(2x^2 - 3x - 5) - M = 6x^2 - 5x + 2$ ;  
b)  $(5x^2 + 9x - 8) + M = 2x^2 - 3x + 5$ .
- Dokazati da za svaki prirodan broj n važi:  $24 | (7n - 1)^2 - (5n + 1)^2$ .
- Skicirati grafik funkcije  $y = -2x$ .  
a) Pripadaju li tom grafiku tačke A(-1, 1) i B(2, -4)?  
b) Koristeći grafik odrediti  $f(-1)$ ,  $f(0)$  i  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .  
c) Odrediti apscise tačaka grafika čije su ordinate -2, 4 i 0.
- Pravougaoniku ABCD odrediti tjemenu C i dužinu stranice AB, ako je A(3,1), B(9,1) i D(3,4). Izračunati obim i površinu tog pravougaonika. Koje su koordinate središta M stranice CD?

**Prijedlog drugog pismenog zadatka****I grupa**

- Uprostiti izraz, a zatim izračunati njegovu vrijednost:  
 a)  $\frac{(-2)^7 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^5}{(-2)^6 \cdot (-2)^4}$ ;    b)  $\sqrt{(5^{15} : 5^8) : 5^3}$ ;    c)  $\frac{(-a)^6 \cdot a^3}{((-a)^2)^2}$ , za  $a = 2$ .
- Rastaviti na činioce izraze: a)  $27a^2bc^3 - 81ab^2c^2$ ;  
 b)  $100x^2y + 600x^2y^2 + 900xy^2$ ;    c)  $0,09p^2 - 0,25q^2$ .
- a) Zbir tri uzastopna neparna broja je 267. Koji su to brojevi?  
 b) Ako su dati polinomi  $A = 2a^2 - 3a + 7$ ,  $B = -a^2$  i  $C = 9a^2 - 5a + 4$ ,  
 odrediti polinom  $4A - 3BC$ .
- Odrediti koeficijent  $k$  funkcije  $y = kx$ , popuniti tablicu i skicirati grafik, ako je funkcija direktno proporcionalna.

x	0,5			3
y		12	$\frac{2}{3}$	6

- Odrediti rješenje jednačine:  $2^x \cdot (8^x)^3 = (4^5)^6$ .

**II grupa**

- Uprostiti izraz, a zatim izračunati njegovu vrijednost:  
 a)  $\frac{(-4)^3 \cdot (-4)^9 \cdot (-4)}{(-4)^4 \cdot (-4)^5}$ ;    b)  $\sqrt{(7^{10} \cdot 7^5) : 7^9}$ ;    c)  $\frac{a^5 \cdot ((-a)^4)^2}{(-a)^9}$ , za  $a = 3$ .
- Rastaviti na činioce izraze: a)  $12x^2y^2z - 60xy^2z$ ;  
 b)  $25a^3 - 300ab^2 + 600a^2b$ ;    c)  $2\frac{7}{9}m^2 - 3\frac{1}{16}n^2$ .
- a) Umanjenik je trostruka vrijednost izraza  $a^2 + 3ab + 2b^2$ , a razlika  $a^2 - 4ab - 3b^2$ . Odrediti nepoznati umanjilac.  
 b) Zbir četiri uzastopna parna broja je 276. Koji su to brojevi?
- Odrediti koeficijent  $k$  funkcije  $y = kx$ , popuniti tablicu i skicirati grafik, ako je funkcija direktno proporcionalna.

x		-2	4	
y	$\frac{1}{2}$		-2	-5

- Odrediti rješenje jednačine:  $(27^x)^5 : 3^{3x} = (81^2)^3$ .

## IX razred

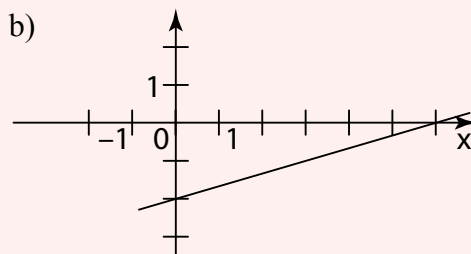
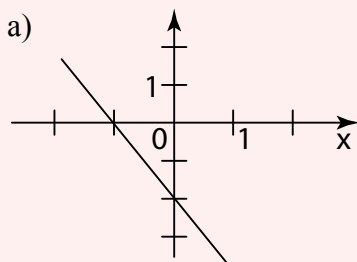
## Linearna funkcija. Površina i zapremina prizme

## I grupa

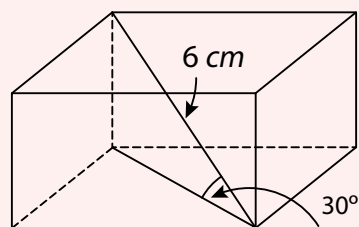
- U skladištu je 60 tona kukuruza. Svakodnevno se u pekari isporuči po 2 tone. Koliko tona kukuruza ostaje u skladištu nakon  $x$  dana?
- Date su funkcije: a)  $y = x(5 - x)$ , b)  $2x - 6y = 8$ , c)  $\sqrt{3x} - 5y = \sqrt{3}$ , d)  $y = \frac{5x-5}{x}$ , e)  $y = 1 - 6x$ . Koje od njih su linearne?
- Napisati implicitni oblik funkcija:
  - $y = 4x - 2$ ,
  - $y = \frac{2x-7}{3}$ ,
  - $y = 8x$ ,
  - $y = -\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}$ .
- Napisati eksplicitni oblik funkcije; a)  $8x - 2y = 4$ , b)  $0,4x + 2 = -2y + 1$  a potom: 1) nacrtati njen grafik; 2) odrediti nulu funkcije; 3) ispitati tok; 4) ispitati znak funkcije.
- Ispitati da li tačke: A(0, -1), B(-2, 5), C(5, 4), D(-30, -3), E(-10, 1) i F(1,5; -2) pripadaju grafiku funkcije: a)  $y = -2x + 1$ ; b)  $y = 0,2x + 3$ .
- Ne crtajući, odrediti da li grafik funkcije zaklapa sa osom Ox oštar ili tup ugao:
  - $y = -0,6x - 2$ ;
  - $\frac{3}{5}x - 2y = 3$ ;
  - $y = \frac{-1+3x}{5}$ .
- Izračunati površinu i zapreminu prave prizme visine 16 cm čija je osnova jednakokraki trapez osnovica 4 cm i 7 cm, i rastojanjem između njih 2 cm.
- Sofija i Ksenija se igraju igračkama – prizmama. One imaju 3 pravilne šestostrane prizme i 4 kocke. Koliko igračke ukupno imaju:
  - tjemena;
  - ivica;
  - strana?
- Pravilna trostrana prizma osnovne ivice  $a = 18$  cm ima površinu  $1350\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Izračunati njenu visinu.
- Obim osnove pravilne šestostrane prizme je 72 cm, a njena visina je 15 cm. Izračunati površinu i zapreminu prizme.

## II grupa

- Odrediti koja linearna funkcija je zadata slikom:



2. U istom koordinatnom sistemu nacrtati grafike funkcija:  $y = 0,5$ ;  $y = 4,5$  i  $y = x - 1$ . Izračunati površinu četvorougla kojeg grade grafici ovih funkcija ako je dužina jedinične duži  $1 \text{ cm}$ .
3. Odrediti koeficijent  $m$  tako da grafik funkcije  $y = mx - 5$  bude:
  - a) paralelan; b) normalan sa grafikom funkcije:
    - 1)  $y = 1,5 - 0,5x$ ; 2)  $3x - y + 15 = 0$ .
4. Nacrtati grafik funkcije: a)  $y = |x| + 3$ , b)  $y = |x + 3|$ ,
  - c)  $y = \begin{cases} -2x + 5, & \text{za } x \in (-\infty, 1) \\ 3, & \text{za } x \in [1, \infty) \end{cases}$
5. Odrediti vrijednosti parametra  $a$  za koje je funkcija  $(8 - 0,5a)x + y - 5 = 0$  opadajuća.
6. Da li postoji funkcija čijem grafiku pripadaju sve tri tačke:  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$  i  $C(2, 4)$ ?
7. Kocka zapremine  $216 \text{ cm}^3$  podijeljena je na manje kocke površine  $24 \text{ cm}^2$ . Koliko je od velike kocke napravljeno malih kocki?
8. Manja dijagonala osnove pravilne šestostrane prizme ima dužinu  $d_m$ , a veći dijagonalni presjek prizme je kvadrat. Dokazati da je zapremina te prizme  $d_m^3$ .
9. Veličina jednog ugla pravougloug trougla jednaka je  $60^\circ$ , a dužina hipotenuzine visine je  $2\sqrt{3} \text{ cm}$ .
  - a) Izračunati obim i površinu tog trougla;
  - b) Izračunati površinu prave prizme čija je osnova taj pravougli trougao, a visina jednaka hipotenuzi osnove.
10. Na osnovu podataka sa slike izračunati:
  - a) dužinu osnovne ivice;
  - b) zapreminu pravilne četverostrane prizme.



## Prijedlog drugog pismenog zadatka

### I grupa

1. a) Zapisati funkciju  $-3x - y + 2 = 0$  u eksplicitnom obliku, a zatim nacrtati grafik funkcije; b) Ispitati tok i znak te funkcije.
2. a) Naći parametar  $m$  tako da su grafici funkcija  $y = (-9 - m)x + 3$  i  $y = 3x + 4$  paralelni.

- b) Za takvo  $m$  ispitati da li tačke  $A(0, 3)$  i  $B(-1, 1)$  pripadaju graficima obje funkcije.
3. a) Izračunati površinu kocke i  $P_{dp}$  kocke ako je dužina njene prostorne dijagonale  $15\sqrt{3}$  cm.
- b) Ako su ivice kvadra  $b = 4$  cm i  $c = 6$  cm, a dužina prostorne dijagonale  $D = 14$  cm izračunati njegovu površinu i zapreminu.
4. Osnova prave prizme je jednakokraki trougao čija je osnovica dužine 16 cm, a visina na osnovicu dužine 6 cm. Ako je površina bočne strane nad krakom  $90$  cm<sup>2</sup>, izračunati površinu i visinu te prizme.

## II grupa

1. a) Zapisati funkciju  $-2x - y + 3 = 0$  u eksplicitnom obliku, a zatim nacrtati grafik funkcije.
- b) Ispitati tok i znak te funkcije.
2. a) Naći parametar  $m$  tako da su grafici funkcija  $y = (-8 - m)x + 3$  i  $y = 2x + 4$  paralelni.
- b) Za takvo  $m$  ispitati da li tačke  $A(0, 1)$  i  $B(-1, 5; 0)$  pripadaju graficima obje funkcije.
3. a) Izračunati površinu kocke i  $P_{dp}$  te kocke ako je dužina njene prostorne dijagonale  $8\sqrt{3}$  cm.
- b) Ako su ivice kvadra  $a = 4$  cm i  $c = 3$  cm, a dužina prostorne dijagonale  $D = 13$  cm, izračunati njegovu površinu i zapreminu.
4. Osnova prave prizme je romb čija je površina  $96$  cm<sup>2</sup>, a jedna dijagonala dužine 16 cm. Ako je površina jedne bočne strane  $70$  cm<sup>2</sup>, izračunati površinu i visinu te prizme.

Jasna Maraš, JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić

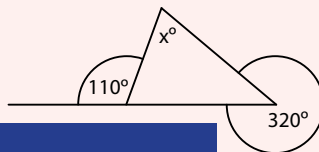
## ODABRANI ZADACI

### V razred

1. Zbir dva broja iznosi 330. Ako se većem broju izbriše posljednja cifra koja je nula, onda su ti brojevi jednaki. Koji su to brojevi?
2. Tri krave su za sedam dana dale 601 litar mlijeka. Prva i druga su zajedno dale 417 litara, a druga i treća 376 litara. Koliko litara mlijeka je dala svaka krava?
3. Izračunati zbir svih neparnih brojeva od 1 do 2025.
4. Za 5 minuta 5 mačaka ulovi 5 miševa. Za koliko minuta će 10 mačaka uloviti 30 miševa?

**VI razred**

1. Rasporediti 12 tačaka na 6 pravih tako da na svakoj pravoj budu po 4 tačke.
2. Za 3 kilograma grožđa i 4 kilograma jabuka plaćeno je 10 eura, a za 6 kilograma grožđa i 2 kilograma jabuka je plaćeno 14 eura. Koliko košta kilogram jabuka, a koliko kilogram grožđa?
3. Jelica je nacrtala brojevnu pravu i na njoj označila neke razlomke. Njen mlađi brat je izbrisao početak poluprave i neke razlomke, tako da je ostao dio od  $\frac{2}{3}$  do  $\frac{7}{8}$ . Kako će Jelica odrediti početak poluprave, ako zna da je rastojanje od  $\frac{2}{3}$  do  $\frac{7}{8}$  pet centimetara?
4. Izračunati nepoznati ugao u datom trouglu.

**VII razred**

1. Riješiti jednačinu:  $||2x - 5| - 4| = 11$ .
2. Vrijednost izraza  $(1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n})$  je 2025. Izračunati  $n$ .
3. U trouglovima su podudarne po dvije stranice:  $b$  i  $b_1$ ,  $c$  i  $c_1$ , kao i visine koje odgovaraju stranicama  $c$  i  $c_1$ . Dokazati da su ti trouglovi podudarni.
4. Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je  $\frac{2}{5}$  ugla na osnovici. Konstruisati taj trougao ako je njegova osnovica  $5\text{ cm}$ .

**VIII razred**

1. Kojom cifrom se završava broj:  $4^n + 5^n + 6^n$ ?
2. Odrediti sve dvocifrene brojeve za koje važi:  $\overline{ab} + \overline{ba} = n^2$ .
3. Ako je broj  $x^2 - 11xy + y^2$  djeljiv sa 13, tada je i izraz  $x^2 - y^2$  djeljiv sa 13. Dokazati.
4. Ako su  $x$  i  $y$  prirodni brojevi i važi:  $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$ , izračunati  $(y - x)^{2025}$ .

**IX razred**

1. Sedam različitih tačaka u prostoru, od kojih nikoje tri nijesu kolinearne, niti su bilo koje četiri komplanarne, određuju:
  - a) sedam puta više pravih nego ravni;
  - b) za 14 više ravni nego pravih;
  - c) sedam puta više ravni nego pravih;
  - d) za 14 više pravih nego ravni?
2. Prave  $y = -x - 1$  i  $2x = y + 4$  sijeku se u tački A, a prave  $x = -2y - 1$  i  $2x + 5y + 1 = 0$  u tački B. Izračunati rastojanje između tačaka A i B.
3. Izračunati površinu figure koja je ograničena graficima funkcija:  $y = |x - 2|$  i  $y = 3$ .

4. Data je kocka  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  čija ivica ima dužinu  $a$ . Ravan  $\pi$ , koja sadrži dijagonalu kocke  $AC_1$  i tjemne B dijeli kocku na dva geometrijska tijela. Izračunati površine tako dobijenih geometrijskih tijela.

**Radomir Božović, JU OŠ „Radojica Perović“, Podgorica**

## TAKMIČARSKI ZADACI

### V razred

1. Od 900 *kg* brašna pekara je prvog dana potrošila četvrtinu, a drugog dana tri petine ostatka. Koliko je brašna ostalo?
2. Jakov je pravougaonik čiji je obim 168 *mm* podijelio na 5 kvadrata čije su dužine stranica jednake. Koliki je obim jednog od tih kvadrata?

### VI razred

1. Ugao  $\alpha$  je za dvije petine pravog ugla veći od njemu suplementnog ugla. Naći ugao  $\alpha$ .
2. Izračunati zbir najmanjeg i najvećeg razlomka čiji je brojilac iz skupa  $A = \{x \mid x \text{ je djelilac broja } 8\}$ , a imenilac iz skupa  $B = \{3, 5, 9\}$ .

### VII razred

1. Simetrale dva ugla trougla se sijeku pod uglom od  $124^\circ$ . Izračunati mjeru trećeg ugla tog trougla.
2. Izračunati vrijednost izraza  $2021x + 2022x + 2023x + 2024x + 2025x$  ako je  $x$  najmanje cjelobrojno rješenje nejednačine  $|x| < 6$ .

### VIII razred

1. Na kvizu znanja je svaka ekipa imala sa svakom od ostalih ekipa po jedan duel. 90% ekipa postiglo je bar po jednu pobjedu a neriješenih rezultata nije bilo. Koliko ekipa je učestvovalo u kvizu?
2. Ako je  $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = \sqrt{75}$ , izračunati  $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}}$ .

### IX razred

1. Površina osnove pravilne četverostrane prizme je  $B$ , a površina jedne bočne strane je 2 puta veća od površine osnove te prizme. Izraziti površinu i zapreminu te prizme u funkciji površine osnove  $B$ .
2. Jedno tjeme trougla je nula funkcije  $y = 0,75x + 12$ , drugo tjeme je presjek grafika funkcije  $4x + 3y - 36 = 0$  sa apcismom osom, a treće tjeme je presječna tačka grafika datih linearnih funkcija. Dokazati da je dati trougao pravougli i izračunati mu obim.

**Danijela Jovanović, JU OŠ „Milorad Musa Burzan“, Podgorica**

**RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA****V razred**

1. Koliko treba upotrijebiti cifara da bi se numerisala knjiga koja ima 421 stranicu?
2. Zbir dva broja je 1000. Ako se jedan od ta dva broja umanja za 87, a drugi poveća za 59, dobijeni brojevi će biti jednaki. Odrediti ta dva broja.

**Rješenja:**

1. Za jednocifrene i dvocifrene brojeve upotrijebi se  $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$  cifara. Za trocifrene brojeve se upotrebi se još  $(421 - 99) \cdot 3 = 966$  cifara. Ukupno se upotrijebi  $189 + 966 = 1155$  cifara.
2. Ako se jedan sabirak umanja za 87, a drugi poveća za 59, zbir će se smanjiti za 28 pa će zbir iznositi  $1\ 000 - 28 = 972$ . Kako su tada sabirci jednaki to imamo da su oba po  $972 : 2 = 486$ . Početni brojevi su:  
 $486 + 87 = 573$  i  $486 - 59 = 427$ .

**VI razred**

1. U petoj dekadi pronaći koliko ima brojeva čiji je zbir cifara djeljiv sa 5, nijesu djeljivi sa 6, i za koje je  $NZD(60, x) = 10$ .
2. Zbir nekih 20 uzastopnih prirodnih brojeva je 2590. Koji su to brojevi? Odrediti među njima one proste brojeve koji su veći od 125.

**Rješenja:**

1. Peta dekada su brojevi od 41 do 50. Izračunajmo zbir cifara i provjerimo djeljivost sa 5.

$41 = 4 + 1 = 5$	djeljivo sa 5,
$42 = 4 + 2 = 6$	nije djeljivo sa 5,
$43 = 4 + 3 = 7$	nije djeljivo sa 5,
$44 = 4 + 4 = 8$	nije djeljivo sa 5,
$45 = 4 + 5 = 9$	nije djeljivo sa 5,
$46 = 4 + 6 = 10$	djeljivo sa 5,
$47 = 4 + 7 = 11$	nije djeljivo sa 5,
$48 = 4 + 8 = 12$	nije djeljivo sa 5,
$49 = 4 + 9 = 13$	nije djeljivo sa 5,
$50 = 5 + 0 = 5$	djeljivo sa 5.

To su brojevi 41, 46 i 50.

Sada ispitajmo da li su ovi brojevi djeljivi sa brojem 6. Broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv i sa 2 i sa 3. Brojevi 41, 46 i 50 nijesu djeljivi sa 6. Dakle, svi ostaju.

Sada provjeravamo  $NZD(60, x) = 10$ . Rastavljujući broj 60 na proste činioce dobijamo:  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Kako je  $NZD(60, 41) = 1$ ,  $NZD(60, 46) = 2$  i  $NZD(60, 50) = 10$ , zaključujemo da je samo broj 50 rješenje našeg zadatka.

2. To su brojevi:  $x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4, \dots, x + 19$ .

$$\begin{aligned}x + x + 1 + x + 2 + \dots + x + 19 &= 2590 \\20x + (9 \cdot 20 + 10) &= 2590 \\20x + 190 &= 2590 \\20x &= 2590 - 190 \\20x &= 2400 \\x &= 2400 : 20 \\x &= 120\end{aligned}$$

Dakle, to su brojevi 120, 121, ..., 139.

Sada, od datih brojeva pronađimo proste brojeve veće od 125.

Lako zaključujemo da su u intervalu od 120 do 139, jedini prosti brojevi veći od 125: 127, 131, 137, 139.

## VII razred

1. Broj  $x$  je cijeli broj takav da je  $x + x^2 = 2x + 15$ . Naći sve vrijednosti  $x$ .
2. Ako je  $p$  najveći prosti broj koji je djelilac broja 2025, koliko je zbir svih rješenja jednačine  $||x + 1| - p| = 1$ ?

**Rješenja:**

1. Transformišimo datu jednačinu:  $x + x^2 = 2x + 15$

$$x + x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - x - 15 = 0$$

$$x^2 - x = 15 = 3 \cdot 5.$$

Ako je  $x = 5$  imamo da je  $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 \neq 15$

Ako je  $x = 3$  imamo da je  $3^2 - 3 = 9 - 3 = 6 \neq 15$

Odgovor: Jednačina nema cjelobrojna rješenja.

2. Rastavimo broj 2025 na proste činioce:  $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ .

Najveći prost broj koji je djelilac broja 2025 je broj 5 tj.  $p = 5$ .

Sada riješimo jednačinu:  $||x + 1| - 5| = 1$ .

$$\begin{array}{ll}
 |x + 1| - 5 = 1 & \text{i} \quad |x + 1| - 5 = -1 \\
 |x + 1| = 1 + 5 & |x + 1| = -1 + 5 \\
 |x + 1| = 6 & |x + 1| = 4 \\
 x + 1 = 6 \text{ ili } x + 1 = -6, & x + 1 = 4 \text{ ili } x + 1 = -4, \\
 x = 6 - 1 \text{ ili } x = -6 - 1, & x = 4 - 1 \text{ ili } x = -4 - 1, \\
 x = 5 \quad \text{ili} \quad x = -7. & x = 3 \quad \text{ili} \quad x = -5.
 \end{array}$$

Dakle,  $x \in \{-7, -5, 3, 5\}$ .

Sada izračunajmo zbir svih rješenja:  $-7 + (-5) + 3 + 5 = -4$ .

Dakle, zbir je  $-4$ .

## VIII razred

- Voćar bere svježe šljive koje pri sušenju gube 70% svoje mase. On želi da pripremi 150 pakovanja suvih šljiva, pri čemu svako pakovanje treba da sadrži 250 grama suvih šljiva. Međutim, zbog nepredviđenih gubitaka tokom pakovanja, ukupno se izgubi još dodatnih 5% suvih šljiva. Koliko kilograma svježih treba da ubere da bi imao dovoljno suvih šljiva za sva pakovanja?
- Koliko ima brojeva manjih od 1 000 koje se završavaju cifrom 9 i jednaki su zbiru kvadrata dva prosta broja?

### Rješenja:

- Zapišimo podatke koji su nam dati:
  - gubitak mase sušenjem je 70%,
  - broj pakovanja je 150,
  - masa po pakovanju suvih šljiva je 250 g,
  - dodatni gubitak pri pakovanju je 5% od suvih šljiva.

Prvo ćemo izračunati ukupnu masu suvih šljiva potrebnih za pakovanja:

$$150 \cdot 250 \text{ g} = 37500 \text{ g} = 37,5 \text{ kg}$$

Dodajmo 5% gubitka zbog pakovanja. To znači da 37,5 kg čini 95% mase suvih šljiva koje je ostalo nakon sušenja.

Masa suvih šljiva pri pakovanju  $x$  je:  $95\% \cdot x = 37,5 \text{ kg}$

$$0,95 \cdot x = 37,5 \text{ kg}$$

$$x = 37,5 \text{ kg} : 0,95$$

$$x \approx 39,47 \text{ kg}$$

Sada izračunajmo masu svježih šljiva prije sušenja. Neka je masa svježih šljiva  $y$ :

$$30\% \cdot y = 39,47 \text{ kg}$$

$$0,30 \cdot y = 39,47 \text{ kg}$$

$$y = 39,47 \text{ kg} : 0,30$$

$$y \approx 131,57 \text{ kg}$$

Da bi dobio dovoljno suvih šljiva za 150 pakovanja od po 250 g, uz dodatnih 5% gubitka pri pakovanju, treba ubrati približno 131,6 kg svježih šljiva.

2. Razmatramo listu prostih brojeva do 31 jer je  $31^2 = 961 < 1000$ .

Prosti brojevi do 31 su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 i 31.

Sada ćemo izračunati sve moguće sume kvadrata dva prosta broja  $a$  i  $b$  tako da važi:  $a^2 + b^2 < 1000$

Iz tih suma biramo one koje završavaju cifrom 9. Kvadrati datih prostih brojeva su:

$$2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 5^2 = 25, \quad 7^2 = 49, \quad 11^2 = 121, \quad 13^2 = 169,$$

$$17^2 = 289, \quad 19^2 = 361, \quad 23^2 = 529, \quad 29^2 = 841, \quad 31^2 = 961.$$

Sada ćemo sumirati tako da je  $a \leq b$  i bilježimo one koji su manji od 1 000 i koje se završavaju sa 9.

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$  – završava se sa cifrom 3, dakle eliminišemo i nastavljamo postupak.

$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$  – završava se cifrom 9 i ostavljamo rezultat.

.

.

.

$23^2 + 29^2 = 529 + 841 = 1370 > 1\ 000$  – ne završava se cifrom 9, pa ne ulazi u rješenje.

Dakle, prethodnim postupkom (uklanjanjem duplikata) dolazimo do rješenja : 29, 59, 89, 149, 179, 269, 349, 419, 479, 509, 599, 659, 709, 769, 839, 869, 929, 959, 989. Ukupno 19 brojeva.

## IX razred

1. Mnogougao sa  $m$  stranica ima 2025 dijagonala više od mnogougla sa  $n$  stranica. Odrediti  $m$  i  $n$ .
2. U ravni se nalaze četiri tačke: A, B, C i D, tako da nijedne tri nijesu na istoj pravnoj. Koliko se različitih pravih može povući kroz bar dvije od ovih tačaka? Koliko se od tih pravih sijeku unutar trougla ABC, ako su tačke A, B i C tjemena trougla, a tačka D se nalazi unutar tog trougla?

**Rješenja:**

1. Iz uslova zadatka dobijamo jednačinu:

$$\begin{aligned}\frac{m(m-3)}{2} &= \frac{n(n-3)}{2} + 2025 \quad / \cdot 2 \\ m(m-3) &= n(n-3) + 4050 \\ m^2 - 3m &= n^2 - 3n + 4050 \\ m^2 - n^2 + 3n - 3m &= 4050 \\ (m-n)(m+n) - 3(m-n) &= 4050 \\ (m-n)(m+n-3) &= 4050\end{aligned}$$

Treba da nađemo dva cijela broja  $a = m - n$  i  $b = m + n - 3$  takva daje  $a \cdot b = 4050$  i da su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi.

Rastavimo 4050 na proste činioce:  $4050 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ . Sabirajući  $a$  i  $b$  dobijamo:

$$a + b = (m - n) + (m + n - 3) = \dots = 2m - 3$$

$$a + b = 2m - 3$$

$$a + b + 3 = 2m, \text{ pa je } m = \frac{a+b+3}{2}.$$

Broj  $n$  dobijamo iz:  $b - a = (m + n - 3) - (m - n) = \dots = 2n - 3$ ,

$$\text{pa je } n = \frac{b-a+3}{2}.$$

Treba da pronademo cijele brojeve  $a$  i  $b$  takve da su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi i da važi:

$$m = \frac{a+b+3}{2} \quad \text{i} \quad n = \frac{b-a+3}{2}.$$

Pošto je  $a = m - n > 0$ , počinjemo od najmanjih faktora:  $a = 1$  i  $b = 4050$ .

$$m = \frac{1 + 4050 + 3}{2} = \frac{4054}{2} = 2027,$$

$$n = \frac{4050 - 1 + 3}{2} = \frac{4052}{2} = 2026.$$

Dobijeni brojevi  $m$  i  $n$  su prirodni brojevi i  $m > n$ , pa je ovo tačno rješenje.

2. Broj pravih koje možemo provući kroz svaka dva različita para tačaka je 6. To su: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Pretpostavimo da se tačka D nalazi unutar trougla ABC. Posmatrajmo koje se prave sijeku unutar tog trougla. Od 6 pravih, one koje uključuju tačku D su AD, BD i CD.

Sve tri prolaze kroz tačku unutar trougla. Ove prave će sjeći stranice trougla i sjeći će se međusobno unutar trougla, pošto D leži unutra.

Dakle, parovi pravih koje se sijeku unutar trougla su:  
 $AD \cap BD$ ,  $BD \cap CD$ ,  $CD \cap AD$ .

Svaka siječe ostale dvije u tački D, koja je već unutar trougla. Ostale prave (kao AB, BC, AC) su stranice trougla i ne sijeku ostale unutar njega (sijeku se u tjemenu).

Odgovor: Tri prave se sijeku unutar trougla, tačno u tački D.

**Aleksandra Živković,**  
**JU OŠ „Božidar Vuković Podgoričanin“ – Podgorica**

Mr Nikola Radojičić

## U SVIJETU ŠIFRI - MORZEOVA AZBUKA

Čovjek je gotovo od svog nastanka, a uporedo sa razvijanjem govora, razvijao sposobnost da nešto što je tajanstveno, vrijedno i bitno, prenese ili izgovori šifrovano. Šifrovanje je proces pretvaranja informacija u neku vrstu koda kako bi se zaštitile od neovlašćenog pristupa. Koristi se u digitalnoj komunikaciji, bankarstvu i drugim oblastima gdje je povjerljivost podataka ključna. Osnovni princip šifrovanja je da samo odabrane osobe sa odgovarajućim ključem mogu dešifrovati poruku i pristupiti originalnim podacima. Postoje različite metode šifrovanja, od simetričnih algoritama koji koriste isti ključ za šifrovanje i dešifrovanje, do asimetričnih metoda gdje se koriste različiti ključevi. Savremena tehnologija šifrovanja je ključna za bezbjednost u digitalnom svijetu. Time se još jednom efektno može poentirati i ka učenicima i ka kreatorima politika na značaj matematike u savremenom dobu.

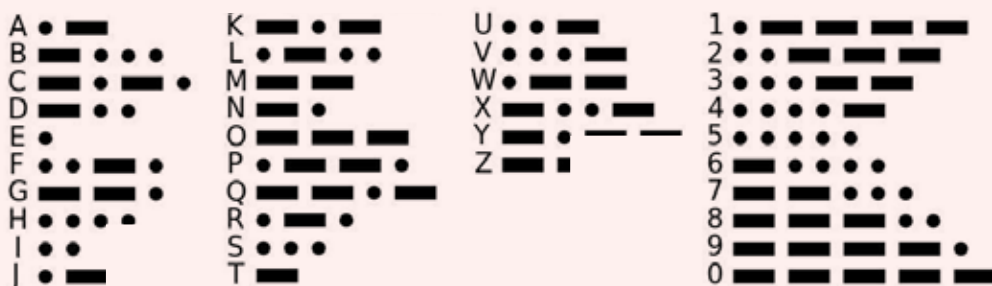
Morzeova azbuka je dobila ime po svom tvorcu, američkom inovatoru Samuelu Morzeu. To je sistem komunikacije koji koristi tačke i crte za predstavljanje slova, brojeva i znakova. Razvijena je u 19. vijeku kako bi omogućila brzu i efikasnu telegrafsku komunikaciju na velikim razdaljinama. Na prvi pogled, Morzeova azbuka izgleda jednostavno. Svaki simbol u Morzeovoj azbuci predstavlja se kombinacijom kratkih i dugih zvučnih signala, svjetlosnih treptaja ili vizuelnih znakova. Vizuelno, svako slovo i cifra predstavljeni su kombinacijom tačaka (•) i crtica (–). Ova forma omogućava brzo kodiranje i dekodiranje poruka, što je od suštinskog značaja u situacijama kada je vrijeme presudno.

Danas se Morzeova azbuka rijetko koristi, ali je i dalje značajna u pomorskoj komunikaciji i kao dio istorije telekomunikacija. Dakle, Morzeova azbuka je primjer kako se određene poruke mogu šifrovati, a sada je na nama

kako osmisлити zadatak da se djeci na jedan primamljiv način približi kriptografija ili da se upoznaju sa njom. Zadatak ima za cilj da pospješi timski rad ekipe, ako igra nije ponuđena za individualno rješavanje. U osnovi, cilj je dešifrovati riječ, rečenicu ili neki pojam koji bi mogao dovesti do rješenja. Varijacije na ovu temu donose mnoštvo interesantnih i djeci primamljivih zadataka, koji od njih zahtijevaju timski rad, preciznost, brzinu i dosjetljivost. Vrijeme je itekako bitan faktor, pa se za različite grupe nadarenosti mogu mijenjati vremenska ograničenja.

Primjer: Morzeova azbuka

Učenicima je zadana rečenica „Ana voli Milovana!“. Učenici dobiju u koverti Morzeovu azbuku (Slika 1) i rečenicu koju treba dešifrovati za relativno kratko vrijeme. Rečenica je data sa dosta slova koja se ponavljaju, što učenike prilikom rješavanja obavezuje na posebnu opreznost prilikom dešifrovanja. Kako se većina takmičara do tada nije sretala sa Morzeovom azbukom, ako bi lider grupe rješavao sam izgubio bi previše vremena dok bi dešifrovao svega par riječi. Dakle, takmičari unutar grupe treba da sarađuju, da se organizuju i svako rješava po jednu riječ. Time se učenici uče liderstvu, podjeli posla i timskom radu, apsolutno nezamjenljivim vještinama u savremenom poslovanju.



Slika 1. Morzeova azbuka

Matematika se pojavljuje u analizi ovog kodiranja. Na primjer, određivanje koliko različitih kombinacija tačaka i crtica možemo napraviti za formiranje riječi ili fraza. Sa svakim dodatnim znakom, potencijalne kombinacije rastu eksponencijalno. Ovo vodi ka zanimljivim kombinatornim problemima koje zainteresovani mogu istraživati i analizirati, pokušavajući izračunati broj mogućih poruka dužine ne koristeći Morzeovu azbuku.

U svijetu šifrovanja, osnovni koncept ostaje isti: kako prenijeti informacije na siguran i efikasan način. U svijetu matematike razvija se kritičko razmišljanje, navodi nas na kreiranje novih oblika šifrovanja, uči nas algoritmima, uvodi znatiželjne u teoriju brojeva.

## PRIPREMA ZA REALIZACIJU ČASA

<b>Škola:</b>	JU OŠ „Vuk Karadžić“
<b>Nastavnice:</b>	Suzana Kovačević, Aleksandra Račić
<b>Predmet:</b>	Matematika
<b>Nastavna tema:</b>	Stepeni
<b>Nastavna jedinica:</b>	Prepoznaju slične monome, koeficijent monoma, sabiraju i oduzimaju ih
<b>Razred:</b>	VIII
<b>Pojmovi - sadržaji:</b>	Monomi, slični monomi, koeficijent monoma
<b>Aktivnost učenika:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– računaju kvadrate brojeva;</li> <li>– primjenjuju formule: za množenje i dijeljenje stepena istih osnova, za množenje i dijeljenje stepena istih izložilaca, stepenovanje stepena;</li> <li>– racionališu imenilac razlomka;</li> <li>– djelimično korjenuju;</li> <li>– rješavaju jednačine sa korjenima i stepenima;</li> <li>– sabiraju i oduzimaju monome i zapisuju ih u standardnom obliku;</li> <li>– primjenjuju stečena znanja o monomima pri sređivanju izraza;</li> <li>– <b>komentarišu</b> primjere;</li> <li>– <b>odgovaraju</b> na pitanja;</li> <li>– <b>primjenjuju</b> znanja iz matematike na različite tipove zadataka;</li> <li>– <b>povezuju</b> sa prethodnim znanjima;</li> <li>– <b>rješavaju</b> zadatke i <b>prezentuju</b> rješenja zadataka;</li> <li>– <b>sarađuju</b> u grupi.</li> </ul>
<b>Ishodi učenja:</b>	<p>Tokom primjene naučenog učenici će moći da:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Prepoznaju slične monome, pročitaju koeficijente monoma;</li> <li>– Monome napišu u standardnom obliku;</li> <li>– Srede izraz i izračunaju njegovu vrijednost za zadate promjenjive.</li> </ul>
<b>Oblik rada:</b>	Frontalni, individualni, rad u grupama.
<b>Metode učenja/nastave:</b>	Metod razgovora, ilustrativna, monološka.

**TOK ČASA**

**1. korak/aktivnost:** Napisati koji redni broj parkinga zauzima automobil.

16

06

68

88



98

**Rješenje:** Sliku okrenuti naopačke. Dobijaju se brojevi: 86 87 88 89 90... Naš broj je 87

**2. korak/aktivnost:**

Nastavnik postavlja pitanja za ponavljanje:

Kako se množe stepeni istih osnova?

Šta su promjenjive, a šta konstante?

Motivacija za učenje postiže se konkretnim primjerom:  $-6 \cdot b \cdot c^3 \cdot 3 \cdot c \cdot b^2 \cdot 5 \cdot a^2$

Ovaj izraz sadrži brojeve i promjenjive povezane znakom množenja. Kako se zovu takvi izrazi? Učenicima treba objasniti šta je monom i da potiče od grčke riječi što znači jednočlan.

Zapisujemo u sveskama: **Monomi su izrazi koji sadrže proizvod konstante i stepena promjenjivih. Brojevi i promjenjive koji su u zapisu monoma zovu se činioци.**

**3. korak/aktivnost:**

Uočiti da u zapisu monoma napisanog na tabli figuriše više brojeva i više jednakih promjenjivih.

$3 \cdot a^2 b^3 c^5$  - u ovom zapisu figuriše tačno jedan broj i svaka promjenjiva je zapisana tačno jednom u obliku nekog stepena. Nastavnik saopštava kako se nazivaju takvi monomi?

Monomi  $5cxy^2$  i  $5cxy^2$  su jednaki dok se monomi  $5x^2y^3$  i  $-20x^2y^3$  razlikuju samo po svojim koeficijentima.

Nastavnik objašnjava kako se zovu takvi monomi. Učenici zapisuju: **Jednake monome i monome koji se razlikuju samo u koeficijentima zovemo slični monomi.**

**4. korak/aktivnost:**

Učenici razumiju kako se sabiraju i oduzimaju slični monomi, kroz izradu primjera.

**Primjer:** Izračunati zbir i razliku monoma  $5x$  i  $14x$ .

**5. korak/aktivnost:**

Formiramo 7 grupa. Nastavnik stavi na sto 7 listića na kojima su kratki primjeri koji će poslužiti da ponove kako se računaju kvadrati brojeva, množe i dijele stepeni istih osnova, množe i dijele stepeni istih izložilaca, stepenuje stepen, racionališe imenilac razlomka, djelimično korjenjuje, rješavaju jednačine sa korjenima i stepenima. Rješenje tih primjera biće redni broj listice sa zadacima vezanim za zapisivanje monoma u standardni oblik, sabiranje i oduzimanje monoma, sređivanje izraza...

$$-3^2 + 5^2 - (-4)^2$$

Zadate monome zapisati u standardnom obliku:

$$\frac{3}{2} \cdot a \cdot 0,5 \cdot b$$

$$\frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{3}{5} \cdot x \cdot y^2$$

$\frac{2^2 \cdot (2^4)^3}{2^{14}}$	Odrediti zbirove monoma: $2a + 4a + 7a$ $11a^2bc + 6a^2bc + 4a^2bc$
$3 + \sqrt{x} = 6$	Odrediti razliku monoma: $3ck - 12ck$ $14ef^2 - (-19)ef^2$
$10^3 : 2^3$	Srediti izraze: $5ab^2 + 6b^2a + baa + 2aba$ $6a^3x + 6ax^3 - 2ax^3 - a^3x - ax^3$ $5ax^2 - 4a^2x + 3a^2x^2 - 8a^2x^2 - a^2x$
$\frac{14}{\sqrt{7}}$	Srediti izraze: 1. $(2a^2b - 10b^3) - (4a^2b - 12b^3)$ 2. $12ab - 30bc - 3cx - (15bc + 9acx)$ 3. $(x^2 - 3x + 2) - (-2x - 3)$
$2\sqrt{8} + 3\sqrt{18}$	Uprostiti izraz, pa izračunati njegovu vrijednost za: $x = \frac{1}{3}, y = -2 \quad (x - y) + (2x - 3y) - 10$
$\frac{6^{18}}{6^6 \cdot 6^8} = 6^x$	Srediti izraz, a zatim izračunati njegovu vrijednost za $x = -\frac{1}{2}, y = 4$ $6x^3 - 8a^2x^3 + 2x^3 + a^2x^3 + 3a + 12x^3a^2$

**6. korak/aktivnost:**

Učenici, već podijeljeni u grupe, dobijaju dvije tabele. Za svaki zadatak u donjoj tablici treba da nađu njegovo rješenje i ispod rješenja upišu slovo koje se nalazi uz taj zadatak i tako otkriju skrivenu poruku. Zadaci su različitog nivoa složenosti, tako da ih svaki učenik može rješavati. Rad je završen tek kada svaki učenik riješi zadatke. Naglasiti da učenici sarađuju u okviru grupe i pomažu jedni drugima.

Vježba je i takmičarskog karaktera. Grupa čiji svi članovi prvi urade sve zadatke dobija mogućnost da prva odgovori na pitanje čiji tačan odgovor donosi i nagradu, (malu ali slatku). Cilj ove vježbe je ponavljanje racionalisanja, kvadriranja, stepenovanja.

$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{6}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{5\sqrt{8}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{8}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{8}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$	$(-3)$	$(2^4)$	$2^2$	$\frac{1}{\sqrt{7}}$	$-4$	$2^0$	$-2^2$
Č	V	E	J	K	U	Č	I	E	O	D	E	J	Ž	O	I	K	E	V
$4\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{15}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{10}}{5}$	$\sqrt{10}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{101}}{10}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	4	-16	9	1	$2^{12}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	-4

**7. korak/aktivnost: Refleksija:** Učenici izvode zaključke o:

- svojoj aktivnosti na času,
- da li su naučili nešto novo,
- da li im se dopada ovakav način rada,
- da li im je bilo zanimljivo.

**8. korak/aktivnost**

Domaći zadatak: Zbirka, zadaci 464, 466, 467.

# SUSRET MATEMATIČARA SRBIJE I CRNE GORE U PETROVCU

Treći Susret matematičara Srbije i Crne Gore održan je od 2. do 5. oktobra 2025. godine u Petrovcu, u organizaciji Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umjetnosti i Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Veliku pažnju privukla je posebna sesija posvećena nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama održana u subotu 4. oktobra. Ova vrsta sesije koja je po prvi put uvrštena u program skupa ove godine, okupila je 50-ak nastavnika osnovnih i srednjih škola, članova Udruženja nastavnika matematike Crne Gore.

Razne teme: *Gle, teorema* (Nebojša Ikodinović), *Matematičke igre kao metod motivacije učenika u nastavi matematike* (Vojislav Andrić), *Dodekaedar* (Rade Živaljević), ... podstakle su prisutne na aktivno učešće u razgovorima, igrama, debatama.

Vjerujemo da će sesija posvećena nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama biti dio i narednih Susreta matematičara a UNMCG će kao i ovog puta, podržati svoje članove koji žele da se na ovaj način profesionalno usavršavaju i razmijene iskustava.



Štampanje ovog broja pomogli su:



MINISTARSTVO  
PROSVJETE, NAUKE  
I INOVACIJA



DOMEN d.o.o.  
PODGORICA



Imate prijatelje!  
MTEL d.o.o.  
PODGORICA



**BEMAX**  
BEMAX d.o.o.  
PODGORICA

Broj žiro računa UNMCG je: 510-206991-61 kod CKB banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

[udruznastmatem@gmail.com](mailto:udruznastmatem@gmail.com)

[www.unmcg.wordpress.com](http://www.unmcg.wordpress.com)

CIP - Каталогизacija u publikaciji  
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala  
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536-5851



9 772536 585009 >