



Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €

NAGRADNI ZADATAK:

$$\begin{array}{r} SAT \\ + AT \\ \hline 5TT \end{array}$$

BROJ 20 - GODINA 2023.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „Dijagonala“, broj 20

Godina 2023.

Cijena: 1,50 €

Glavni urednik:	<i>mr Radomir Božović</i>
Odgovorni urednik:	<i>Danijela Jovanović</i>
Redakcija:	<i>Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Anđa Vujović, Milan Rosandić, Nikola Radojičić, Irena Pavićević, Nevena Ljujić</i>
Lektura:	<i>Milja Božović, prof.</i>
Korektura:	<i>Danijela Jovanović, prof.</i>
Priprema za štampu:	<i>Branko Gazdić</i>
Tiraž:	<i>1000</i>
Štampa:	<i>„Studio Branko“ d.o.o. – Podgorica</i>

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala“ za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Sadržaj

Nekoliko primjera rješavanja zadataka iz kinematike za osnovnu školu	3
Algoritmi teorije brojeva	9
Zadaci za vježbu	13
Odabrani zadaci	21
Takmičarski zadaci	23
Rješenja takmičarskih zadataka iz prošlog broja	24
Priprema za čas	28
Geometrija u praktičnim zadacima	32
Leonardo Fibonači	37

Goran Babović, prof.

NEKOLIKO PRIMJERA RJEŠAVANJA ZADATAKA IZ KINEMATIKE ZA OSNOVNU ŠKOLU

Način rješavanja zadataka iz fizike ima svoj redosled kao i u nastavi matematike. Zadatak se prvo čita nekoliko puta kako bi se u potpunosti razumio. Podaci dati u zadatku se zapisuju. Zapisuju se i potrebne formule. Crtaju se slike, šeme, kao i sve ono što zahtijeva sama postavka zadatka, a u cilju lakšeg i što jednostavnijeg dolaska do traženog rješenja.

U toku izrade zadataka koriste se određena znanja stečena u nastavi matematike, kao što su: znanja o jednačinama, direktna i obrnuta proporcionalnost, aritmetička sredina, predstavljanje rezultata sa određenom tačnošću, itd.

Matematika i fizika su usko povezane discipline, koje su kroz istoriju, jedna drugoj pomagale u proučavanju pojedinih oblasti. Matematičari su, rješavajući pojedine fizičke probleme, pomagali fizici da kroz upotrebu matematičkih alata dođe do rješenja. S druge strane, pojedine matematičke oblasti su unaprijeđene baš kroz pokušaje da se riješe pojedini fizički problemi. Matematičari su tada dolazili do zaključaka koji su unapređivali samu matematičku teoriju.

U narednih nekoliko zadataka ćemo rješavati određene probleme vezane za kretanja tijela (ta oblast se u fizici naziva kinematika) korišćenjem znanja o jednačinama i sistemima jednačina.

Zadatak 1: U koliko sati je trebao da krene prvi biciklista, koji vozi brzinom od 15 km/h , da bi ga u 11 sati i 20 minuta sustigao drugi biciklista, koji sa istog mjesta kreće u 8 sati i vozi brzinom od 21 km/h ?

Rješenje:

$v_1 = 15 \text{ km/h}$ – intenzitet brzine kojom se kreće prvi biciklista;

$v_2 = 21 \text{ km/h}$ – intenzitet brzine kojom se kreće drugi biciklista;

$t = 11 \text{ h } 20 \text{ min} = 11\frac{1}{3} \text{ h}$ – vrijeme susreta,

$t_2 = 8 \text{ h}$ – vrijeme polaska drugog bicikliste.

Do susreta biciklisti pređu iste puteve: $S_1 = S_2 = S$.

$S_1 = v_1 \cdot \Delta t_1$ $S_2 = v_2 \cdot \Delta t_2$

$\Delta t_2 = t - t_2 = 3\frac{1}{3} \text{ h}$ – vrijeme kretanja drugog bicikliste do susreta.

$S_2 = v_2 \cdot \Delta t_2 = 70 \text{ km/h}$

4 Dijagonala

$S_1 = v_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{S_1}{v_1} = 4 \frac{2}{3}$ je vrijeme kretanja drugog bicikliste do susreta. Sada je:

$\Delta t_1 = t - t_1 \Rightarrow t_1 = t - \Delta t_1 = 6 \frac{2}{3} \text{ h} = 6 \text{ h } 40 \text{ min}$, što je traženo vrijeme polaska prvog bicikliste.

Zadatak 2: Rastojanje između dvojice automobilista je 384 km . Oni su istovremeno krenuli jedan drugome u susret. Prvi automobilista vozi brzinom od 60 km/h , a drugi brzinom od 84 km/h . Koliko vremena će trajati njihova vožnja i koliki put će preći svaki od automobilista do mjesta njihovog susreta?

Rješenje:

$d = 384 \text{ km}$ – rastojanje između automobilista;

$v_1 = 60 \text{ km/h}$ - intenzitet brzine kojom se kreće prvi automobilista;

$v_2 = 84 \text{ km/h}$ – intenzitet brzine kojom se kreće drugi automobilista.

Označimo sa S_1 put koji je prešao prvi automobilista do susreta, a sa S_2 put koji je prešao drugi automobilista do susreta, krećući se brzinama v_1 i v_2 za vrijeme t . Tada je:

$$v_1 = \frac{S_1}{t} \Rightarrow S_1 = v_1 \cdot t,$$

$$v_2 = \frac{S_2}{t} \Rightarrow S_2 = v_2 \cdot t$$

Kako je $S_1 + S_2 = d$, to je:

$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = d \Rightarrow t \cdot (v_1 + v_2) = d,$$

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} = 2,67 \text{ h}$$

$$S_1 = v_1 \cdot t = 160 \text{ km}$$

$$S_2 = v_2 \cdot t = 224 \text{ km}.$$

Zadatak 3: Rastojanje između dva učenika je 2170 m . Oni su istovremeno krenuli jedan drugome u susret. Prvi prelazi za minut 75 m , a drugi 80 m . Koliko će metara preći svaki od učenika do momenta njihovog susreta?

Rješenje: $S_1 = 1050 \text{ m}$, $S_2 = 1120 \text{ m}$.

Zadatak 4: Turisti su za jedan sat prešli 3 km . Ako bi produžili da se kreću istom brzinom, na mjesto sastanka stižu sa zakašnjenjem od 40 minuta . Zato su povećali brzinu kretanja za $\frac{1}{3}$ i na mjesto sastanka došli 45 minuta prije dogovorenog vremena. Koliki su put turisti prešli do mjesta sastanka? Koliko vremena su proveli u putu?

Rješenje: Dati su početno vrijeme i pređeni put, $t = 1$ h, $S_1 = 3$ km, pa je $v_1 = \frac{S_1}{t} = 3$ km/h. Ako bi produžili da se kreću ovom brzinom kasnili bi 40 min, pa zbog toga povećavaju svoju brzinu na: $v_2 = v_1 + \frac{1}{3}v_1 = \frac{4}{3}v_1 = 4$ km/h. Nadalje, sa t_u ćemo označiti ukupno vrijeme za koje su turisti stigli do mjesta sastanka.

$S = v_1 \cdot (t_u + 40 \text{ min})$ – prelaze put S krećući se brzinom v_1 i pri tom kasne 40 min.

$S = v_2 \cdot (t_u - 45 \text{ min})$ – prelaze put S krećući se brzinom v_2 i pri tom na mjesto sastanka dolaze prije dogovorenog vremena za 45 min.

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednačina, dobijamo:

$$v_1 \cdot (t_u + 40 \text{ min}) = v_2 \cdot (t_u - 45 \text{ min})$$

$$3 \text{ km/h} \cdot (t_u + \frac{2}{3} \text{ h}) = 4 \text{ km/h} \cdot (t_u - \frac{3}{4} \text{ h}),$$

pa rješavajući ovu jednačinu dobijamo da je $t_u = 5$ h - vrijeme koje su proveli u putu, dok je put koji su prešli do mjesta sastanka:

$$S = v_1 \cdot (t_u + \frac{2}{3} \text{ h}) = 17 \text{ km}.$$

Zadatak 5: Automobilista je prvi sat vozio brzinom od 60 km/h. Shvativši da će na sastanak zakasniti 45 minuta povećao je brzinu za 25% i stigao na vrijeme. Koliki put je prešao automobilista i koliko je trajalo njegovo putovanje?

Rješenje: Neka je $v_1 = 60$ km/h; $v_2 = v_1 + 25\%$ od v_1

$$v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} + \frac{15 \text{ km}}{\text{h}} = 75 \text{ km/h}.$$

$S = v_1 (t_u + 45 \text{ min})$ je put koji bi prešao automobilista krećući se brzinom 60 km/h, a kasneći 45 minuta. U slučaju kada automobilista poveća brzinu, pređeni put je: $S = v_2 \cdot t_u$. Izjednačavajući ove dvije jednačine dobijamo:

$$v_1 \cdot (t_u + 45 \text{ min}) = v_2 \cdot t_u, \text{ odnosno,}$$

$$60 \text{ km/h} \cdot (t_u + \frac{3}{4} \text{ h}) = 75 \text{ km/h} \cdot t_u, \text{ te rješavanjem jednačine dobijamo da je: } t_u = 3 \text{ h, odnosno pređeni put je } S = 225 \text{ km}.$$

Zadatak 6: Brod je plovio niz rijeku 3 sata i 24 minuta, a zatim uz rijeku 4 sata i 12 minuta. Dužina puta koji je brod prešao ploveći niz rijeku je za 19,8 km duža od puta koji je brod prešao ploveći uz rijeku. Odrediti brzinu broda u stajaćoj vodi, ako je brzina riječnog toka jednaka 4,5 km/h.

Rješenje: Neka je:

$t_1 = 3 \text{ h i } 24 \text{ min} = 3,4 \text{ h}$ - vrijeme plovidbe niz rijeku;

$t_2 = 4 \text{ h i } 12 \text{ min} = 4,2 \text{ h}$ - vrijeme plovidbe uz rijeku. Kako je dužina puta koji je brod prešao ploveći niz rijeku S_1 za $19,8 \text{ km}$ duža od puta koji je brod prešao ploveći uz rijeku S_2 , pišemo:

$$S_1 = S_2 + 19,8 \text{ km} \text{ ----- (1)}$$

Ako sa v_b označimo brzinu broda u stajaćoj vodi, a sa v_r brzinu riječnog toka ($v_r = 4,5 \text{ km/h}$) dobijamo jednačine:

$S_1 = (v_b + v_r) \cdot t_1$ ----- (2), put koji je brod prešao ploveći niz rijeku i

$S_2 = (v_b - v_r) \cdot t_2$ ----- (3), put koji je brod prešao ploveći uz rijeku.

Unesemo li jednakosti (2) i (3) u jednačinu (1) dobićemo:

$$(v_b + v_r) \cdot t_1 = (v_b - v_r) \cdot t_2 + 19,8 \text{ km}$$

$$v_b \cdot t_1 + v_r \cdot t_1 - 19,8 \text{ km} = v_b \cdot t_2 - v_r \cdot t_2$$

$$v_b \cdot (t_2 - t_1) = v_r \cdot (t_1 + t_2) - 19,8 \text{ km}$$

$$v_b = \frac{v_r \cdot (t_1 + t_2) - 19,8 \text{ km}}{t_2 - t_1} = 18 \text{ km/h}.$$

Zadatak 7: Rastojanje između dvije luke brod je prešao za 4 sata ploveći niz rijeku i za 6 sati ploveći uz rijeku. Odrediti rastojanje između luka, ako je brzina riječnog toka jednaka 3 km/h .

Rješenje: $S = (v_b + v_r) \cdot t_1$ i $S = (v_b - v_r) \cdot t_2$

$$v_b = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}, S = 72 \text{ km}.$$

Zadatak 8: Za automobilom, koji je krenuo iz jednog mjesta, krene nakon pola sata drugi automobil i stigne ga nakon $2,5 \text{ h}$ vožnje. Krećući se i dalje u istom pravcu, brži automobil je bio, nakon jednog sata vožnje, 10 km ispred sporijeg. Kojom brzinom su se kretali automobili?

Rješenje: Vrijeme kretanja prvog automobila do susreta sa drugim automobilom je $t_1 = \frac{1}{2} \text{ h} + 2,5 \text{ h} = 3 \text{ h}$, a vrijeme kretanja drugog automobila do susreta je $t_2 = 2,5 \text{ h}$. Sa v_1 označavamo brzinu kretanja prvog, a sa v_2 brzinu kretanja drugog automobiliste. Kako su do susreta prešli iste puteve dobijamo jednačinu $S_1 = S_2$, odnosno,

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 \Rightarrow 3 \text{ h} \cdot v_1 = 2,5 \text{ h} \cdot v_2 \text{ ----- (1)}$$

Poslije susreta kreću se i dalje u istom pravcu i smjeru i istim brzinama, pri čemu je brži automobil poslije 1 h vožnje bio 10 km ispred sporijeg:

$$S_2 = S_1 + 10 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ h} \cdot v_2 = 1 \text{ h} \cdot v_1 + 10 \text{ km}, \text{ odnosno,} \\ v_2 = v_1 + 10 \frac{\text{km}}{\text{h}} \dots\dots\dots(2).$$

Uvrstimo li jednakost (2) u jednakost (1) dobićemo jednačinu:

$3 \text{ h} \cdot v_1 = 2,5 \text{ h} \cdot (v_1 + 10 \frac{\text{km}}{\text{h}})$, pa nakon rješavanja ove jednačine dobijamo da je:

$$v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \text{ a } v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Zadatak 9: Ako bi se brzina jednog voza povećala za 30 km/h , on bi stigao u stanicu 2 sata ranije. Ako bi se, pak, brzina tog voza smanjila za 20 km/h , on bi u tu stanicu došao sa 3 h zakašnjenja. Kolika je brzina voza i koliki je put koji voz treba da pređe?

Rješenje: Voz prelazi put S , za vrijeme t , krećući se brzinom v ($S = v \cdot t$).

Ukoliko povećamo brzinu voza za 30 km/h , njegova brzina će biti $v_1 = v + 30 \text{ km/h}$, pa će on isti put S preći za 2 h ranije, odnosno za $t_1 = t - 2 \text{ h}$. Sada je:

$$S = v \cdot t = v_1 \cdot t_1 = (v + 30 \text{ km/h}) (t - 2 \text{ h}) \dots\dots\dots(1)$$

Ukoliko, pak, vozu smanjimo brzinu za 20 km/h , ($v_2 = v - 20 \text{ km/h}$), on bi u stanicu došao za $t_2 = t + 3 \text{ h}$ (kasnio bi 3 h). Znači, on prelazi put:

$$S = v \cdot t = v_2 \cdot t_2 = (v - 20 \text{ km/h}) (t + 3 \text{ h}) \dots\dots\dots(2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{cases} v \cdot t = (v + 30 \text{ km/h}) (t - 2 \text{ h}) \\ v \cdot t = (v - 20 \text{ km/h}) (t + 3 \text{ h}) \end{cases}$$

čijim uprošćavanjem dobijamo $\begin{cases} 3v - 20t = 60 \\ -2v + 30t = 60 \end{cases}$, pa rješavanjem dolazimo do: $v = 60 \text{ km/h}$ i $t = 6 \text{ h}$, odnosno, $S = v \cdot t = 360 \text{ km}$.

Zadatak 10: Brzi voz prelazi 12 km na sat više nego putnički voz. Brzi voz je stigao u svoju krajnju stanicu nakon 3 h vožnje, dok je putnički voz poslije 4 h vožnje prešao put 6 km duži od posljednje stanice brzog voza. Kolike su brzine ovih vozova?

Rješenje:

$$S_b = (v_p + 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}) t_b$$

$$S_b + 6 \text{ km} = v_p t_p$$

$$v_p = 42 \text{ km/h} \quad \text{i} \quad v_b = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Zadatak 11: Po kružnici obima 540 cm , kreću se ravnomjerno dva tijela. Ako se kreću u suprotnim smjerovima, mimoilaze se nakon svakog minuta, a ako se kreću u istom smjeru mimoilaze se nakon svaka $4,5\text{ min}$. Koliko prelazi svako od tih tijela za 1 min ?

Rješenje: Kada se tijela kreću jedno drugom u susret, do susreta prelaze puteve x_1 i $O - x_1$, gdje je O obim kružnice po kojoj se kreću, pa je:

$$v_1 = \frac{x_1}{t_1}, \text{ a } v_2 = \frac{O-x_1}{t_1} \quad (v_2 > v_1).$$

Kada se kreću u istom smjeru do susreta prelaze puteve x_2 i $O + x_2$, pa je:

$$v_1 = \frac{x_2}{t_2}, \text{ a } v_2 = \frac{O+x_2}{t_2}.$$

Iz ovih jednačina vidimo da je:

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \frac{t_1}{t_2} \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{O-x_1}{t_1} = \frac{O+x_2}{t_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{O-x_1}{t_1} = \frac{O+x_2}{t_2} \quad \text{----- (2)}$$

Jednačine (1) i (2) predstavljaju sistem jednačina, čijim rješavanjem se dobija:

$$x_2 = 945\text{ cm} \text{ i } x_1 = 210\text{ cm}, \text{ odnosno}$$

$$v_1 = \frac{x_1}{t_1} = 210\text{ cm/min} \quad \text{ i } \quad v_2 = \frac{O-x_1}{t_1} = 330\text{ cm/min}.$$

Dakle, prvo tijelo za jedan minut prelazi 210 cm , a drugo 330 cm .

Zadatak 12: Iz gradova A i B koji se nalaze na rastojanju od 55 km krenula su jedan drugom u susret dva pješaka i sreli se kroz 5 sati. Odrediti brzine kojima su se kretali pješaci, ako je do momenta susreta pješak iz grada A prešao 5 km više od pješaka iz grada B .

Rješenje:

$$AB = 55\text{ km}, \quad t_s = 5\text{ h} - \text{ vrijeme proteklo do susreta.}$$

$$S_A + S_B = 55\text{ km}$$

$$S_A = S_B + 5\text{ km. Rješavanjem ovog sistema dobijamo da je:}$$

$$S_A = 30\text{ km} \quad \text{ i } \quad S_B = 25\text{ km}, \text{ pa su brzine pješaka:}$$

$$v_A = \frac{S_A}{t_s} = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{ i } \quad v_B = \frac{S_B}{t_s} = \frac{5\text{ km}}{\text{h}}.$$

ALGORITMI TEORIJE BROJEVA

Napisaćemo nekoliko algoritama koji su povezani sa teorijom brojeva. Prije implementacije programa podsjetimo se da je prirodan broj n veći od 1 prost ako su njegovi jedini djelioци 1 i n . Na primjer, 2, 19 i 71 su prosti brojevi, dok 8 i 77 nijesu prosti.

Prvo ćemo riješiti zadatak koji provjerava da li je broj x prost. Najprostiji algoritam provjerava sve brojeve od 2 do $x - 1$ kao moguće djelioce. Ako nijedan od njih ne dijeli x , tada je x prost broj. Broj koraka ovog algoritma je proporcionalan broju x . Funkcija koja implementira ovaj algoritam je:

```
bool isPrime(int x) {
    for (int d = 2; d < x; d++){
        if (x % d == 0) return false;
    }
    return true;
}
```

Lako se možete uvjeriti da u gornjoj funkciji možemo provjeravati samo djelioce do \sqrt{x} . Zaista, ako je broj djeljiv sa d tada je djeljiv i sa x/d , a jedan od tih brojeva je sigurno manji od \sqrt{x} . Ova verzija algoritma je prikazana u sljedećoj funkciji:

```
bool isPrimeRoot(int x) {
    for (int d = 2; d * d <= x; d++){
        if (x % d == 0) return false;
    }
    return true;
}
```

Jasno je da će broj koraka ovog algoritma bit proporcionalan broju \sqrt{x} .

Sljedeći problem koji rješavamo je prikaz svih prostih brojeva manjih od x . Možemo koristiti jednu od funkcija `isPrime` ili `isPrimeRoot` i pregledati sve brojeve između 2 i x :

```
void primes(int x) {
    for (int i = 2; i < x; i++) {
        if (isPrimeRoot(i)) cout << i << endl;
    }
}
```

10 Dijagonala

Broj koraka ovog algoritma će biti proporcionalan broju $x\sqrt{x}$ ili kako smo ranije pisali, složenost algoritma je $O(x\sqrt{x})$.

Postoji i mnogo elegantnije rješenje ovog problema, koje je poznato još iz antičkih vremena kao Eratostenovo sito. Algoritam je sljedeći:

1. Pretpostavimo da su svi brojevi prosti
2. Svaki broj čiji je djelilac trenutni broj nije prost
3. Ponavljamo korak 2. za svaki broj koji je označen kao prost.

Složenost ovog algoritma se izražava pomoću simbola logaritama, koji se izučava u srednjoj školi, i ona iznosi ($n \log \log n$).

Poređenja radi za $n = 65536$ dobijamo da je $\log \log n = 4$ a $\sqrt{n} = 256$. Više informacija na adresi: https://hr.wikipedia.org/wiki/Eratostenovo_sito.

Funkcija koja implementira ovaj algoritam je:

```
void eratosten(int n){
    bool prosti[n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        prosti[i] = true;
    // svi parni brojevi osim 2 nisu prosti
    for(int i = 4; i < n; i += 2)
        prosti[i] = false;
    // neparni djeliloci
    for(int i = 3; i < n; i += 2){
        if(!prosti[i]) continue;
        for(int j = i + i; j < n; j += i)
            prosti[j] = false;
    }
    for (int i = 2; i < n; i++) {
        if (prosti[i]) cout << i << endl;
    }
}
```

Najveći zajednički djelilac prirodnih brojeva a i b , engleski Greatest Common Divisor ili GCD, je takođe problem koji je riješen u doba antičke Grčke i poznat je pod nazivom Euklidov algoritam. Postoji više implementacija ovog algoritma. Mi ćemo pokazati najkraću, rekurzivnu, verziju:

```
int gcd(int a, int b){
    if(b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b);
}
```

Kraća verzija se dobija primjenom takozvanog ternarnog operatora:

```
int nzs(int a, int b) {
    return b ? nzs(b, a % b) : a;
}
```

Najmanji zajednički sadržalac, engleski LCA (Least common multiple) lako se izračunava na osnovu jednakosti: $\text{GCD}(a,b) * \text{LCM}(a, b) = a*b$.

```
int lcm (int a, int b){
    return a*b / gcd(a,b);
}
```

Sljedeći zadatak koji rješavamo je stepenovanje po modulu, tj. izračunavamo $n^x \% m$. Može se koristiti sljedeći iterativni algoritam:

```
int powIter(int n, int x, int m){
    int ret = 1;
    for(int i = 0; i < x; i++){
        ret *= n;
        ret %= m;
    }
    return ret;
}
```

Uočimo da, ako je x paran broj, važi jednakost: $n^x = (n^2)^{\frac{x}{2}}$. Napišimo rekurzivnu funkciju koristeći ovu jednakost:

```
int fastPowRec(int n, int x, int m){
    if(x == 0) return 1;
    if(x == 1) return n;
    // ako je stepen paran, primijenimo formulu iz teksta
    if(x % 2 == 0) return
        fastPowRec(n * n % m, x / 2, m);
    //inace primijenimo obican postupak
    return (fastPowRec(n, x - 1, m) * n) % m;
}
```

Postoji još jedan brzi način za stepenovanje po modulu, koji koristi predstavljanje broja u obliku stepena broja 2. Na primjer,

$A^{2023} = A^{1024} \cdot A^{512} \cdot A^{256} \cdot A^{128} \cdot A^{64} \cdot A^{32} \cdot A^4 \cdot A^2 \cdot A^1$. Funkcija je:

```
int fastPow(int n, int x, int m) {
    int ret = 1;
    while(x > 0) {
        if(x % 2 == 1) ret = ret * n % m;
        n = n * n % m;
        x = x / 2;
    }
    return ret;
}
```

12 Dijagonala

Prošireni Euklidov algoritam, pored pronalaženja najvećeg zajedničkog djelioca cijelih brojeva a i b , što radi standardni Euklidov algoritam, nalazi cijele brojeve x i y koji zadovoljavaju sljedeću jednakost: $ax + by = \text{NZD}(a, b)$.

Ako su brojevi a i b uzajamno prosti, onda se kaže da je x modularni multiplikativni inverz od a po modulu b , a y je modularni multiplikativni inverz od b po modulu a . Ova činjenica je veoma značajna u kriptografiji, pri izračunavanju ključa u RSA algoritmu za šifrovanje javnim ključem. Nerekurzivna varijanta ovog algoritma je implementirana sljedećom funkcijom:

```
void extended_gcd(int a, int b ) {
    int r1 = a, x1 = 1, y1 = 0;
    int r2 = b, x2 = 0, y2 = 1;
    int q, r3, x3, y3;
    while( r2 != 0 ) {
        q = r1 / r2;
        r3 = r1 - q * r2;
        x3 = x1 - q * x2;
        y3 = y1 - q*y2;
        r1 = r2;
        x1 = x2;
        y1 = y2;
        r2 = r3;
        x2 = x3;
        y2 = y3;
    } // vazi: x1*a + y1*b == r1
    cout << x1 << "*" << a << "+" << y1 << "*" << b <<
        " = " << r1 << endl;
}
```

ZADACI ZA VJEŽBU

1. Napisati program koji će za dati prirodni broj n ispisati sve njegove proste djelioce.
2. Napisati program koji za dati prirodni broj n vraća sumu svih prostih brojeva manjih od n .
3. Napisati rekurzivnu varijantu proširenog Euklidovog algoritma.
4. Napisati program koji učitava uzajamno proste prirodne brojeva a i b a vraća najmanji prirodan broj c tako da važi $a * c \equiv 1(\text{mod } b)$.
Upustvo: Koristiti prošireni Euklidov algoritam.

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

Množenje i dijeljenje razlomaka. Procenti.

1. Odrediti sve tačke koje su jednako udaljene od krajeva duži CD, a onda duž CD podijeliti na osam jednakih djelova .
2. Konstruisati ugao od: a) 30° ; b) 75° ; c) 135° .
3. Konstruisati ugao koji je jednak: a) $\frac{1}{4}$ pravog ugla; b) $\frac{3}{8}$ opruženog ugla.
4. Nacrtati duž $|AB| = 9 \text{ cm}$, pa konstruisati duž $|GH| = \frac{3}{4}|AB|$.
5. Izračunati : a) $\frac{5}{12} \cdot 4$; b) $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{15}$; c) $3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{4}$; d) $1,25 \cdot 10$;
e) $34,9 \cdot 5,75$; f) $4,35 \cdot 7$.
6. Izračunati : a) $\frac{12}{13} : 6$; b) $8 : \frac{4}{5}$; c) $\frac{2}{7} : \frac{8}{9}$; d) $2\frac{4}{5} : 3\frac{1}{3}$; e) $354,5 : 100$;
f) $9,25 : 2,5$; g) $24 : 0,006$.
7. Izračunati vrijednost izraza:
a) $8\frac{3}{4} - (2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3})$; b) $(0,8 + 0,24) : 0,25 + (84,8 - 16,5 : 5)$.
8. Riješiti jednačine: a) $\frac{1}{4} : x = \frac{2}{3}$; b) $(1 - \frac{2}{3}) \cdot x = 2\frac{1}{9}$; c) $15 : (2x + 1\frac{1}{4}) = 1\frac{1}{2}$.
9. Riješiti nejednačine:
a) $x : \frac{3}{4} > \frac{5}{6}$; b) $(2x - 1) \cdot 3 < 1,5$; c) $x : (0,5 + \frac{2}{3}) > \frac{3}{4}$.
10. Razliku brojeva $4\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ pomnožiti sa 2, a zatim odrediti $\frac{5}{17}$ tog izraza.
11. Prodavac je prvog dana prodao 45,8 kg banana, drugog 36,5 kg, a trećeg dana 41,6 kg banana. Koliko je kg banana prosječno prodao u toku jednog dana?
12. Razdaljina između dva mjesta na karti je 90 cm. Kolika je razdaljina u prirodi ako je razmjera karte 1: 500000?
13. Cijena jakne je sa 120 € povećana za 20%. Kolika je nova cijena jakne?

Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

I grupa

1. a) Konstruisati ugao od $22^\circ 30'$;
b) Nacrtati duž $|MN| = 12 \text{ cm}$, a potom konstruisati duž $|EF| = \frac{3}{8}|MN|$.

14 Dijagonala

2. Izračunati vrijednost izraza:

a) $(2\frac{7}{9} - \frac{2}{3}) : 3\frac{4}{5}$; b) $(0,08 - 0,2 : 10) \cdot 12,25$.

3. Riješiti jednačine: a) $x : 0,4 = 0,5$; b) $\frac{2}{3} \cdot (x - \frac{3}{4}) = \frac{1}{6}$.

4. Riješiti nejednačine: a) $0,4 : x > 1\frac{3}{5}$; b) $x : 2\frac{2}{3} - 0,3 < 0,45$.

5. U jednoj fabrici radi 1264 radnika. Odnos zaposlenih žena prema muškarcima je 1 : 3. Koliko muškaraca radi u fabrici, a koliko žena?

II grupa

1. a) Konstruisati ugao od $82^{\circ}30'$;

b) Nacrtati duž $|GH| = 10 \text{ cm}$, a onda konstruisati duž $|AB| = \frac{5}{8} |GH|$.

2. Izračunati vrijednost izraza:

a) $2\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})$; b) $(12,8 - 5,2 : 10) \cdot 2,25$.

3. Riješiti jednačine: a) $2\frac{1}{8} \cdot x = 4,25$; b) $(2\frac{3}{5} + 0,2) : x = 5\frac{3}{5}$.

4. Riješiti nejednačine : a) $x : 1,3 < 2$; b) $3\frac{1}{4} + 4,8 : x > 5\frac{3}{4}$.

5. Putnik je prešao 45 km, što čini 90% puta. Koliko je dug cio put?

Ana Đurđić, JU OŠ „Jagoš Kontić“, Nikšić

VII razred

Racionalni brojevi. Četvorougao.

1. Vrijednost izraza $2 - 0,8 \cdot (6 - 2,5 : \frac{2}{5})$ je:

a) 2,2; b) 4; c) 0,3. Zaokružiti tačan odgovor.

2. Da li je vrijednost izraza $(2 - 1\frac{1}{4}) : 2 + (\frac{1}{2} - 4) \cdot \frac{2}{5}$ manja od -1 ?

3. Odrediti vrijednosti izraza A, B i C ako je:

$$A = 0,2 \cdot (-\frac{10}{4}); \quad B = 8,7 - 5,44 : (-1,6) + A;$$

$$C = B : (3\frac{5}{8} - 2,625) + \frac{5}{4}(-2,4 + 3,5).$$

4. Riješiti jednačine: a) $x : (-\frac{5}{3}) - 1\frac{4}{5} = -5$; b) $\frac{11}{15} : (\frac{1}{3} \cdot x - \frac{5}{4}) = \frac{3}{5}$;

$$c) (1\frac{1}{3} \cdot x - 1) \cdot (2 - 2\frac{1}{2} \cdot x) = 0.$$

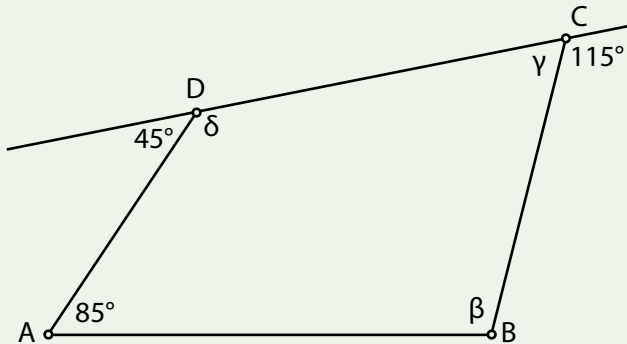
5. Riješiti nejednačine i na koordinatnoj osi prikazati skupove njihovih rješenja:

a) $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot x < 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}$; b) $-3,8 \cdot (5x - 0,6) < 0$;

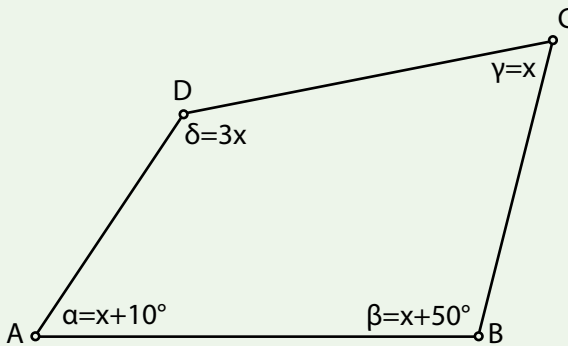
c) $-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot (6 - x) \geq -\frac{7}{8}$.

6. Izračunati unutrašnje uglove četvorougla na slici:

a)



b)



7. Jedan ugao romba je 99° . Odrediti ostale uglove tog romba.
8. Zbir dva ugla paralelograma je 250° . Odrediti uglove tog paralelograma.
9. Dijagonala AC pravougaonika ABCD, dužine 18 cm , gradi sa stranicom AB ugao $\sphericalangle CAB = 30^\circ$. Odrediti dužine stranica ovog pravougaonika, ako je njegov obim 50 cm .
10. Oštar ugao jednakokrakog trapeza je 60° , dužina kraka je 20 cm , a zbir njegovih osnovica je 100 cm . Kolike su dužine osnovica tog trapeza?
11. Dužina osnovice jednakokrakog trapeza je 7 cm , a ugao na toj osnovici je 45° . Kolika je površina tog trapeza, ako je njegova visina 2 cm ?

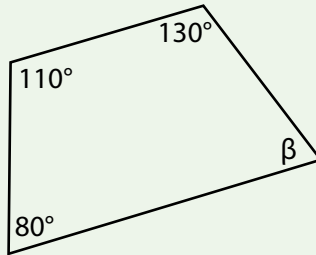
16 Dijagonala

- Konstruisati četvorougao ABCD, ako su mu poznati sledeći elementi:
 $|AB| = 7 \text{ cm}$, $|AD| = 4 \text{ cm}$, $|BC| = 3 \text{ cm}$, $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$.
- Konstruisati romb čije su dijagonale $d_1 = 8 \text{ cm}$, $d_2 = 6 \text{ cm}$.
- Konstruisati pravougaonik čija je jedna stranica $a = 5 \text{ cm}$ i dijagonala $d = 8 \text{ cm}$.

Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

I grupa

- Izračunati vrijednost izraza: a) $1,6 - 0,9 \cdot 3,75$;
b) $-6\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \left(5\frac{5}{6} - \frac{2}{5} : \frac{3}{4}\right)$; c) $4,5 - 2\frac{3}{8} \cdot 16 - \left(3,2 : 1\frac{3}{5} - 4,6\right)$.
- Riješiti jednačine: a) $-1,2 + 4 \cdot x = -6,4$; b) $\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot (x - 5) = -\frac{7}{8}$.
- Riješi nejednačinu i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja:
 $7x - 3(2x + 7) \geq 8 - 2(x + 1)$.
- a) Odrediti nepoznati unutrašnji ugao četvorougla sa slike:

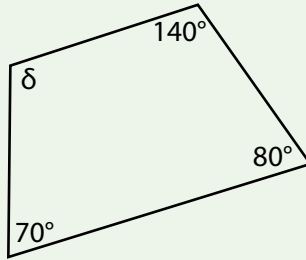


- b) Jedan spoljašnji ugao paralelograma je 125° . Izračunati unutrašnje i spoljašnje uglove tog paralelograma.
- Visina DK paralelograma ABCD ima dužinu 8 cm . Odrediti obim ovog paralelograma, ako je njegova površina $P = 160 \text{ cm}^2$ i ugao $\sphericalangle A = 30^\circ$.

II grupa

- Izračunati vrijednost izraza:
a) $-1,5 + 0,625 \cdot 0,8$; b) $\left(-1\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) : \left(2\frac{1}{4} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)$;
c) $-3,525 : 1,5 + (-10,35 - 0,984 : 0,8) \cdot 1,8$.
- Riješiti jednačine: a) $-6 \cdot x + 4,7 = -2,5$; b) $(5 - x) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$.
- Riješiti nejednačinu i na koordinatnoj osi prikazati skup njenih rješenja:
 $5x - 2 \cdot (3x - 2) < -3 \cdot (2x - 5) + 2$.

4. a) Odrediti nepoznati unutrašnji ugao četvorougla sa slike:



- b) Spoljašnji ugao romba je $\alpha = 45^\circ$. Izračunati njegove unutrašnje i spoljašnje uglove.
5. Osnovice trapeza su $a = 26 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$ i krak $c = 10 \text{ cm}$. Poznati krak i jedna osnovica obrazuju ugao od 30° . Izračunati površinu tog trapeza.

Lidija Glušica, JU OŠ „Jagoš Kontić“, Nikšić

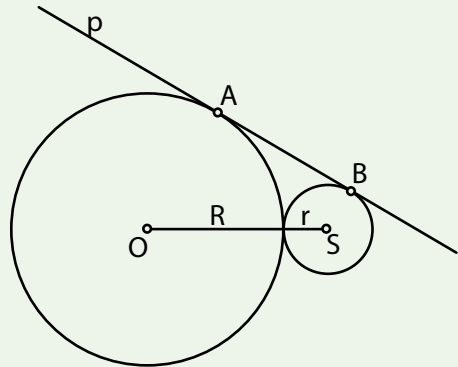
VIII razred

Primjena Pitagorine teoreme. Krug i kružnica.

1. Visina romba je 5 cm . Odrediti obim i površinu romba ako je jedan njegov spoljašnji ugao 135° .
2. Izračunati obim romba ako je jedna dijagonala za 4 cm duža od druge dijagonale. Površina romba je 96 cm^2 .
3. Jedna osnovica pravouglog trapeza iznosi $\frac{3}{2}$ druge osnovice. Ako je visina tog trapeza 4 cm a krak 5 cm , izračunati obim i površinu tog trapeza.
4. Stranica AB jednakostraničnog trougla ABC je dijagonala romba $ADBC$ čiji je ugao 60° . Izračunati obim i površinu četvorougla $ADBC$ ako je $AB = 8\sqrt{3} \text{ cm}$.
5. U pravouglom trapezu $ABCD$ ($AB \parallel CD$) sa pravim uglom kod tjemena A , $\triangle ABC$ je jednakostraničan, a četvorougao $ABCM$ ($M \in AD$) je deltoid. Ako je kraća osnovica trapeza $CD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$, izračunati površinu i obim tog trapeza.
6. Neka je M središte stranice CD kvadrata $ABCD$. Izraziti obim i površinu trougla ABM u funkciji stranice kvadrata a .
7. Uglovi na dužoj osnovici trapeza su 41° i 49° . Ako je duža osnovica 35 cm , a kraci 20 cm i 15 cm , kolika je površina trapeza?
8. Stablo drveta visoko 25 m prelomljeno je i vrhom dodiruje zemlju na udaljenosti 5 m od podnožja. Na kojoj visini je stablo prelomljeno?

18 Dijagonala

9. a) Visina romba je 4 cm . Odrediti obim i površinu kruga upisanog u romb.
b) Odrediti poluprečnike dvije koncentrične kružnice ako je jedan poluprečnik za 2 cm veći od drugog a površina kružnog prstena kojeg formiraju te dvije kružnice je $20\pi\text{ cm}^2$.
c) Obim kruga je $62,8\text{ cm}$. Koliki je centralni ugao koji odgovara kružnom luku dužine $12,56\text{ cm}$?
d) Površina kvadrata je 16 cm^2 . Odrediti obim kruga opisanog i upisanog u taj kvadrat.
10. Krugovi $k(O, R)$ i $k_1(S, r)$ se dodiruju kao na slici. Prava p dodiruje te krugove u tačkama A i B (tj. prava p je zajednička tangenta za oba kruga). Ako je $R = 9\text{ cm}$ i $r = 3\text{ cm}$ odrediti dužinu stranice AB a zatim i površinu četvorougla $ABS O$.



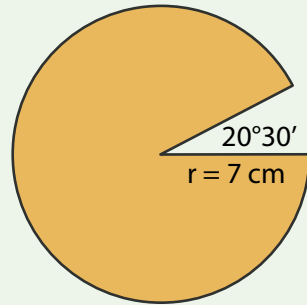
11. Dužina tetive kruga je 6 cm . Odrediti poluprečnik ovog kruga ako je periferijski ugao nad ovom tetivom 45° .
12. Površina kružnog isječka kojem odgovara centralni ugao 15° je $\frac{5}{12}\pi\text{ cm}^2$. Odrediti dužinu kružnog luka.

Prijedlog zadatka za IV pismeni zadatak

I grupa

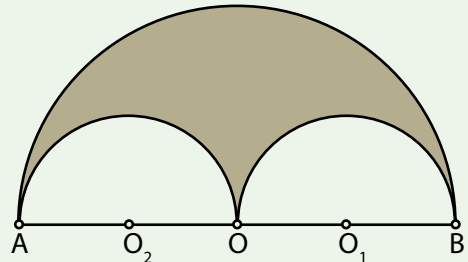
1. Poluprečnik kružnice je 12 cm , a centralni ugao α je $\frac{3}{5}$ pravog ugla. Izračunati:
a) dužinu kružnog luka koji odgovara centralnom uglu;
b) površinu kružnog isječka koji odgovara centralnom uglu.
2. Odrediti površinu i obim kruga upisanog u romb čije su dijagonale 6 cm i 8 cm .
3. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trapeza $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ako je $AB = 22\text{ cm}$, $CD = 10\text{ cm}$ i $\sphericalangle A = 30^\circ$.
4. Površina romba je 216 cm^2 , a jedna njegova dijagonala je 24 cm . Izračunati obim i površinu tog romba.

5. Izračunati površinu i obim obojane figure.



II grupa

- Površina kružnog prstena iznosi $51\pi \text{ cm}^2$, a širina mu je 3 cm . Izračunati poluprečnike krugova koji obrazuju taj prsten.
 - Luk dužine $4\pi \text{ cm}$ iz centra se vidi pod uglom 45° . Odrediti poluprečnik tog kruga.
- Oko kvadrata stranice 4 cm je opisana kružnica, a oko te kružnice opisan je jednakostranični trougao. Odrediti dio trougla koji ne pripada krugu.
- Krak jednakokrakog trapeza je 6 cm , a kraća osnovica 7 cm , a jedan unutrašnji ugao 30° . Izračunati površinu tog trapeza.
- Izračunati površinu i dužine dijagonala romba čija je stranica dužine 12 cm , a ugao 60° .
- Izračunati površinu i obim obojene figure sa slike ako je $AB = 12 \text{ cm}$.



Marko Bogojević, JU OS „Milorad Musa Burzan“, Podgorica

IX razred

Valjak, kupa, lopta. Prikazivanje podataka.

- Izračunati površinu i zapreminu kupe ako je prečnik osnove 6 cm , a visina kupe je 8 cm .
- Izračunati površinu valjka ako njegova baza ima površinu $36\pi \text{ cm}^2$ a visina je dužine 4 cm .
- Prečnik baze valjka je 8 cm . Odrediti dijagonalu osnovog presjeka, ako je visina valjka jednaka 6 cm .

20 Dijagonala

- Izračunati zapreminu valjka ako je obim njegove osnove 8π cm, a mjerni broj visine tog valjka je rješenje jednačine $\frac{9H+7}{2} - (H - \frac{H-2}{7}) = 36$ (u cm).
- Omotač kupe razvijen u ravan je kružni isječak poluprečnika 60 cm. Izračunati površinu kupe ako je centralni ugao isječka $\alpha = 120^\circ$.
- Površina kupe je 45π cm², a površina njenog omotača je 30π cm². Odrediti ugao koji grade visina i izvodnica kupe.
- Izračunati površinu valjka ako je poluprečnik r i visina H rješenje sistema (u cm):
$$\begin{cases} (H-6)(r-2) = (H-3)(r-3) \\ (H-9)(r-1) = r(H-10). \end{cases}$$
- Zapremina lopte je 48π cm³. Izračunati površinu lopte.
- Od 40 turista, 16 je boravilo u Grčkoj, 8 u Italiji, 10 u Španiji, a 6 u Francuskoj. Date podatke predstaviti kružnim dijagramom.
- Od 600 radnika, 240 je odmor provelo na moru, 180 na planini, a ostatak kod kuće. Date podatke predstaviti kružnim dijagramom.

Prijedlog zadataka za IV pismeni zadatak

I grupa

- Obim osnove valjka je 20π cm. Kolika je zapremina valjka ako je njegova visina 30 cm?
- Površina presječnog kruga ravni α i lopte $L(O, r = 15$ cm) je 81π cm². Odrediti rastojanje centra lopte od ravni α . (Nacrtati skicu.)
- Omotač kupe ima površinu 60π cm², a poluprečnik osnove i dužina izvodnice se odnose kao 3 : 5. Izračunati zapreminu kupe.
- Izračunati površinu valjka ako je mjerni broj poluprečnika baze tog valjka rješenje jednačine $r^2 - (r-1)^2 = 7$, a mjerni broj visine tog valjka je rješenje jednačine $\frac{3H+1}{2} + \frac{4-H}{5} = 13$ (mjerna jedinica cm).
- Djevojčica ima 72 eura koje želi da potroši za kupovinu poklona. Na kružnom dijagramu je prikazano kako je djevojčica potrošila svoj novac. Odrediti tačan broj eura koje je djevojčica potrošila za kupovinu poklona.



II grupa

1. Obim osnove valjka je 40π cm. Kolika je zapremina valjka ako je njegova visina 10 cm?
2. Izračunati površinu presječnog kruga ravni α i lopte $L(O, r = 5$ cm) ako je rastojanje centra lopte od ravni α jednako 3 cm. (Nacrtati skicu.)
3. Omotač kupe ima površinu 500π cm², a dužina izvodnice i poluprečnik osnove se odnose kao 5 : 4. Izračunati zapreminu kupe.
4. Izračunati površinu valjka ako je mjerni broj poluprečnika baze tog valjka rješenje jednačine $\frac{2r-1}{3} + \frac{3+r}{4} = 5$, a mjerni broj visine tog valjka je rješenje jednačine $(H-2)^2 - H^2 = -28$ (mjerna jedinica cm).
5. U jednom odjeljenju devetog razreda učenici se bave sledećim sportovima: košarkom 12 učenika, plivanjem 6, odbojkom 8 i rukometom 4 učenika. Podatke prikazati kružnim dijagramom.

Nevena Šaranović, JU OŠ „Vladimir Nazor“, Podgorica

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Cijena ulaznice za utakmicu je 180 eura. Kada je cijena ulaznice smanjena, broj posjetilaca se povećao za 50%, a prihod je porastao za 25%. Kolika je nova cijena ulaznice?
2. Razlika između $\frac{5}{12}$ prvog i $\frac{5}{12}$ drugog broja je $\frac{3}{8}$. Čemu je jednaka razlika $\frac{4}{7}$ prvog i $\frac{4}{7}$ drugog broja?
3. Učenik je pročitao knjigu za tri dana. Prvog dana je pročitao $\frac{3}{8}$ knjige, drugog dana $\frac{5}{12}$ knjige, a trećeg dana $\frac{1}{6}$ knjige i još 10 stranica. Koliko je stranica imala knjiga?
4. Odrediti sve četvorocifrene brojeve oblika \overline{abba} djeljive sa 45.

VII razred

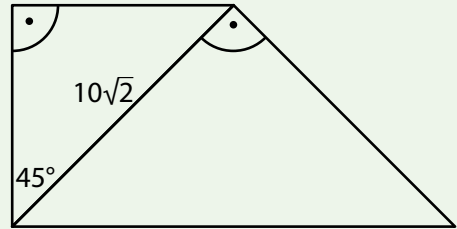
1. Jedan ugao četvorougla je 50° , drugi je jednak polovini trećeg, dok je četvrti ugao jednak zbiru prva dva. Odrediti uglove četvorougla.

22 Dijagonala

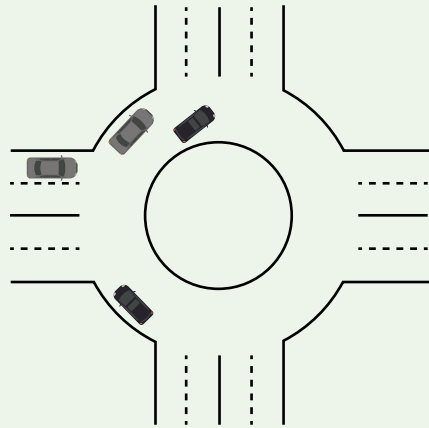
- Ako su u četvorouglu ABCD tačke M, N, P i Q središta stranica AB, BC, CD i DA, a $2MP = BC + AD$ i $2NQ = AB + CD$, onda je četvorougao ABCD paralelogram. Dokazati.
- Konstruisati jednakokraki trapez, ako mu je dat zbir osnovica, krak i dijagonala ($a + b, c, d$).
- Na polici su složene knjige: 4 plave, 2 žute i 3 crvene i to tako da su knjige iste boje jedna do druge. Na koliko se načina mogu rasporediti ove knjige?

VIII razred

- Osnovica jednakokrakog trougla je 16 cm a obim 50 cm . Kolika je površina kvadrata konstruisanog nad njegovom visinom?
- Dvije kugle stoje na razdaljini 15 m . Jedna je visoka 35 m , druga 43 m . Koliko je rastojanje njihovih vrhova?
- Izračunati obim i površinu četvorougla sa slike desno.



- Na slici desno je dat jedan kružni tok. Površina koju zauzima čitav kružni tok je $1225\pi\text{ m}^2$, a širina kolovozne trake je 10 m . Koliku površinu zauzima prazan prostor u sredini kružnog toka?



IX razred

- Kolač je napravljen u obliku kugle koja ima dva sloja. Unutrašnji sloj je od marcipana i ima poluprečnik 3 cm , a oko njega je sloj čokolade debljine 3 cm . Kolika je zapremina dijela kolača od čokolade u ovom kolaču?

- Pravougli trougao, čije su katete $a = 9 \text{ cm}$ i $b = 12 \text{ cm}$, rotira oko katete b . Koliki je odnos između površine osnove i površine omotača dobijene kupe?
- Gomila pijeska ima oblik kupe čiji je obim osnove $8\pi \text{ m}$, a visina 3 m . Koliko kubnih metara pijeska ima u toj gomili?
- Posuda oblika valjka, poluprečnika osnove 5 cm , ispunjena je vodom do $\frac{11}{12}$ njene visine. Ako se u tu posudu potopi lopta poluprečnika $2,5 \text{ cm}$, nivo vode dostiže tačno vrh te posude. Kolika je njena visina?

TAKMIČARSKI ZADACI

VI razred

- Četiri gusara su zaplijenili kutiju sa zlatnicima. Najjači je uzeo 33 zlatnika, a trojica su podijelili ostale zlatnike, srazmjerno svojoj snazi. Tada je vođa naredio da najjači svakom od ostalih gusara da onoliko zlatnika koliko ih oni već imaju. Sada je drugi imao najviše, pa je morao po naređenju ostaloj trojici dati onoliko zlatnika koliko ih svaki već ima. Zatim je tako morao postupiti treći, pa četvrti. Posle toga se ispostavilo da svi imaju isti broj zlatnika. Koliko je svaki gusar prigrabio zlatnika na početku?
- Dokazati da je $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, a zatim izračunati:
 - $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100}$;
 - $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.

VII razred

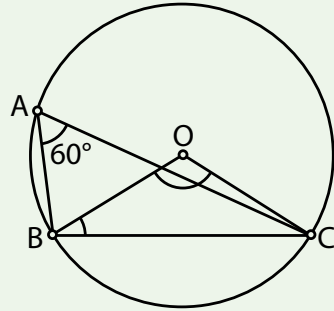
- Na koliko načina 6 osoba mogu istovremeno da se smjeste na 6 od 9 pričvršćenih i numerisanih stolica?
- Jednakokraki trapez ABCD, gdje je $AD \parallel BC$ i $BC < AD$, dijagonalom AC podijeljen je na dva jednakokraka trougla. Izračunati uglove trapeza.

VIII razred

- Prava dijeli kvadrat tako da u tjemenu kvadrata obrazuje sa stranicom ugao od 60° . Izračunati površinu većeg dijela kvadrata ako je $a = 3 \text{ cm}$.

24 Dijagonala

2. Ugao između dvije tetive AB i AC jednog kruga je 60° . Ako je poluprečnik tog kruga 6 cm i tačka O njegov centar, odrediti:
- ugao BOC ;
 - ugao OBC ;
 - dužinu tetive BC.



IX razred

- Data je četvrtina kruga određena međusobno normalnim poluprečnicima OA i OB . Prava p paralelna sa tetivom AB siječe luk AB u tački C (tačka C je jedna od dvije presječne tačke), a produžetke duži OA i OB u tačkama P i Q . Dokazati da je $AB^2 = PC^2 + QC^2$.
- Po krugu treba rasporediti cifre 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 i 9. Da li je moguće napraviti takav raspored da zbir svake tri uzastopne cifre:
(a) nije veći od 14; (b) nije veći od 15?
Ako je moguće, navesti po jedan primjer takvih rasporeda.

Siniša Krivokapić i Ana Tomašević,
JU OŠ „Dašo Pavičić“, Herceg Novi

RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

- Iz balona, do vrha napunjenim čistim alkoholom, odlije se četvrtina i dopuni se vodom. Zatim se ponovo odlije trećina sadržine i dolije voda. Čega u balonu trenutno ima više – vode ili alkohola?
Rješenje: Izračunaćemo koji dio suda čini voda. Poslije prvog dolivanja ima $\frac{1}{4}$ vode. Kada odlijemo ponovo trećinu tečnosti, odličemo i $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ vode, i ostaće u posudi $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ vode. Kada dolijemo još $\frac{1}{3}$ vode

imaćemo: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ vode. Dakle, u balonu imamo jednake količine vode i alkohola.

2. Na pravougaonom bilijarskom stolu MNPQ nalaze se kugle obilježene tačkama A i B. Udarena kugla A prvo se odbija od ivice PQ u tački X, a zatim od ivice QM u tački Y, i tako pogađa kuglu B. Odrediti tačke X i Y ako znaš da se kugla odbija od ivice tako da dolazna i odlazna putanja obrazuju jednake uglove prema toj ivici.

Rješenje: Tačke A i A_1 simetrične su u odnosu na PQ, tačke B i B_1 simetrične su u odnosu na QM. Tačke X i Y su tačke prave A_1B_1 i stranica pravougaonika.

VII razred

1. Ako označimo sa t_a i t_b težišne duži koje odgovaraju katetama a i b pravouglog trougla ABC, dokazati da je $\frac{t_a+t_b}{a+b} < \frac{3}{2}$.

Rješenje: Neka je $AA_1 = t_a$ i $BB_1 = t_b$.

Iz trouglova AA_1C i BB_1C dobijamo relacije: $t_a < b + \frac{a}{2}$ i $t_b < a + \frac{b}{2}$, zato što je svaka stranica trougla manja od zbira druge dvije stranice.

Gore navedene relacije sabiramo sa obje strane:

$$t_a + t_b < a + b + \frac{a+b}{2} = \frac{2a+2b+a+b}{2} = \frac{3a+3b}{2}$$

$$t_a + t_b < a + b + \frac{a+b}{2} = \frac{2a+2b+a+b}{2} = \frac{3a+3b}{2}$$

$$t_a + t_b < \frac{3}{2} \cdot (a+b) \Rightarrow \frac{t_a+t_b}{a+b} < \frac{3}{2}$$

2. Odrediti cifre x , y i z tako da u dekadnom sistemu važi jednakost:

$$\frac{1}{x+y+z} = 0,xyz.$$

Rješenje: Iz date jednakosti $\frac{1}{x+y+z} = 0,xyz$ slijedi $(100x+10y+z)(x+y+z) = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Kako su x , y i z cifre, najveća moguća vrijednost $x+y+z$ je 27, a najveća moguća vrijednost za $100x+10y+z$ je 999. Mogući su sledeći slučajevi: $500 \cdot 2$; $250 \cdot 4$; $200 \cdot 5$; $125 \cdot 8$; $100 \cdot 10$; $50 \cdot 20$ i $40 \cdot 25$. Ispitivanjem zaključujemo da samo par $x+y+z = 8$, $100x+10y+z = 125$, ispunjava pomenute uslove, pa je jedino rješenje date jednačine $x = 1$, $y = 2$ i $z = 5$, a traženi broj je 0,125.

Pošto je n neparan broj i $3n^2 + 8$ je neparan, što znači da je \overline{aaaa} neparan, odnosno da je cifra a neparan broj. Broj $3n^2 + 8$ nije djeljiv sa 3, zato je $a \neq 3$ i $a \neq 9$.

Ostaje da se proba koji od slučajeva $a \in \{1, 5, 7\}$ daje rješenje. Probajući, dolazimo do zaključka da samo jednačina $3n^2 + 8 = 5555$ ima rješenje $\Rightarrow n = 43$.

Znači, traženi brojevi su: 41, 43 i 45.

IX razred

1. Osnovna ivica pravilne trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ je $AB = a$, a visina $CC_1 = a\sqrt{2}$. Neka je α ravan određena tačkama A , C_1 i središtem ivice BB_1 , a β ravan određena tačkama C , B_1 i središtem ivice AB . Odrediti dužinu duži koja pripada presjeku ravni α i β i nalazi se unutar prizme.

Rješenje: Neka su K i L središta ivica BB_1 i AB , a M i N presječne tačke duži CB_1 i C_1K , odnosno AK i B_1L redom. Primjenom Pitagorine teoreme

na $\triangle ACC_1$ dobijamo: $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$. Tačke

M i N su težišta $\triangle BC_1B_1$ i $\triangle ABB_1$, pa je $KM = \frac{1}{3}KC_1$ i $KN = \frac{1}{3}KA$.

$\triangle MNK$ i $\triangle C_1AK$ su slični ($\sphericalangle MKN = \sphericalangle C_1KA$; $KM : C_1K = KN : KA = 1 : 3$), pa je $MN : AC_1 = MK : C_1K = 1 : 3$, odakle dobijamo:

$$MN = \frac{AC_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednačinu: $x^2 - y^2 = 36$.

Rješenje:

Zapisaćemo: $(x + y) \cdot (x - y) = 36$, što znači da $(x + y)$ i $(x - y)$ trebaju biti dva prirodna broja čiji je proizvod 36. Postoje sljedeće mogućnosti: $9 \cdot 4$, $18 \cdot 2$ ili $36 \cdot 1$. Jedina mogućnost gdje će x i y biti prirodni brojevi je $18 \cdot 2$.

Rješavamo sistem jednačina:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Dobijamo: $x = 10$ i $y = 8$.

Mirsad Markashi, Gezim Nasradini,
Arta Resulbegović, Hajlije Kapllanbegu
JU OŠ „Maršal Tito“, Ulcinj

PRIPREMA ZA ČAS

Predmet:	Matematika
Razred:	VIII
Nastavni sadržaj:	Obim kruga
Čas realizovala:	Snežana Boljević
Obrazovni zadaci:	Sticanje znanja o obimu, razumijevanje kako se dolazi do formule za obim kruga i kako se primjenjuje u zadacima.
Funkcionalni zadaci:	Sticanje sposobnosti izražavanja matematičkim jezikom, jasno i precizno, u pismenom i usmenom obliku; razvijanje navika tačnog obilježavanja geometrijskih objekata; sticanje navike brzog i tačnog računanja; primjenom misaonih operacija, naročito apstrakcije i generalizacije, razvijanje matematičkog mišljenja i sposobnosti za induktivni oblik zaključivanja.
Vaspitni zadaci:	Razvijanje samostalnosti, sistematičnosti, preciznosti u radu; logičko, analitičko, kreativno i kritičko mišljenje učenika. Njegovanje radnih navika, pozitivan stav prema predmetu, odgovornost za svoj rad. Njegovanje kulture izražavanja i ponašanja na času, samopouzdanje i povjerenje u vlastite matematičke sposobnosti.
Obrazovno-vaspitni ishod:	Učenici će usvojiti i naučiti formulu za obim kruga i naučiti da je primjenjuju u zadacima u skladu sa obrazovnim standardima. Upoznaće osnovne karakteristike broja π , kao i zanimljivosti vezane za njega.
Napomena:	Učenici su na prethodnom času dobili domaći zadatak da od papira/ kartona naprave krug proizvoljnog prečnika ili jednostavno da ga nacrtaju u sveskama. Izmjere obime i prečnike takvih krugova i izračunaju količnik tih veličina.

AKTIVNOSTI UČENIKA

Uvodni dio časa:

– Osvrt na prethodni čas.

Učenici rješavaju ukrštenicu formiranu u „classtools.net/crossword“ aplikaciji, a radi lakšeg praćenja dobijaju ukrštenicu na radnim listovima (Prilog 1). Prisjećaju se naučenih pojmova sa prethodnih časova iz oblasti Krug i kružnica.

Glavni dio časa:

Nastavnik uz Power Point prezentaciju (ako je ima), još jednom, daje pojašnjenje što se od učenika zahtijevalo da urade za domaći zadatak i koje podatke su trebali da pripreme za čas. Uz pomoć aplikacije „Wordwall, random wheel“, tj. slučajnog točka nastavnik proziva učenike da saopšte podatke dobijene mjerenjem dužine kružnice i prečnika proizvoljnih modela kruga. Podatke unosi u unaprijed pripremljenu tabelu. Kako bi većinu učenika uključio u aktivnosti časa nastavnik bira učenike lošijih postignuća da samostalno računaju količnik obima i prečnika kružnice i te podatke unosi u tabelu. Učenici bi trebali da, na osnovu podataka iz tabele, zaključe da je taj količnik konstantan i da je njegova vrijednost približna broju π . Samostalno izvode formulu za izračunavanje obima kruga.

Nastavnik saopštava učenicima značaj broja π u matematici i fizici, približava im istorijske činjenice nastanka i razvoja ovog broja. Upoznaje ih, takođe, sa raznim zanimljivostima vezanih za ovaj iracionalan broj i podstiče ih da i sami o njemu istražuju. Učenici slušaju melodiju broja π , a zatim zajedno kometarišu impresije.

Nastavnik dijeli nastavne listove (Prilog 2), sa zadacima za vježbanje, koje rješavaju u paru. Svoje rezultate lakših zadataka učenici upoređuju sa pripremljenim rješenjima sa prezentacije, dok teže zadatke odabrani učenik uz nastavnikovu pomoć zapisuje na tabli.

Završni dio časa:

Obnavljaju formulu za izračunavanje obima kruga i približnu vrijednost broja π .

Aplikacijom „Mentimeter“, kroz pripremljena pitanja učenici daju impresije o času, kritikuju, daju sugestije i ističu metode rada koje su bile njima interesantne.

<http://www.mentimeter.com/app/presentation/e4c24b0ab2a0dd4fad5a2f841b524618/c1397eb08743>.

Domaći zadatak:

Zbirka zadataka

str. 111, zadaci: 1055, 1056, 1058, 1060.

PRAĆENJE:

– Znanje i kognitivne vještine: razumijevanje i poznavanje pojmova, povezivanje sa konkretnim problemom, sposobnost korišćenja znanja u rješavanju problema.

– Komunikacijske vještine: komunikacija i saradnja učenika sa nastavnikom i tokom rada u paru, način iznošenja rješenja.

OSNOVNI NIVO

Pitanja i zadaci za usmeno obnavljanje pojmova sa prošlih časova: („classtools.net/crossword“ UKRŠTENICA)

- Kako se naziva dio kružnice koji je omeđen dvijema tačkama sa kružnice?
- Kako se naziva prava koja sa kružnicom ima jednu zajedničku tačku?
- Kako se naziva prava koja siječe kružnicu?
- Šta predstavlja skup tačaka u ravni koje su na jednakom rastojanju od jedne iste tačke te ravni?
- Kako se naziva najduža tetiva kruga?
- Kako se naziva duž koja spaja dvije tačke sa kružnice?
- Kako se zove unija kružnice i njene unutrašnje oblasti?

Rad u paru:

- Pamte formulu za izračunavanje obima kruga. Rješavaju najjednostavnije zadatke.

SREDNJI NIVO

Pitanja i zadaci za usmeno obnavljanje pojmova sa prošlih časova: („classtools.net/crossword“ UKRŠTENICA)

- Kakvi su međusobno centralni uglovi nad istim kružnim lukom?
- Kako se naziva tačka u kojoj se sijeku prečnici kruga?
- Ugao čije tjeme sadrži centar kruga, a kraci sadrže poluprečnike naziva se...
- Kakvi su uglovi nad prečnikom?

Rad u paru:

- Primjenjuju formulu za izračunavanje obima kruga u rješavanju osnovnih zadataka.

VIŠI NIVO

Pitanja i zadaci za usmeno obnavljanje pojmova sa prošlih časova: („classtools.net/crossword“ UKRŠTENICA)

Rad u paru:

- Rješavaju teže matematičke probleme primjenom stečenog znanja.

PRILOG 1

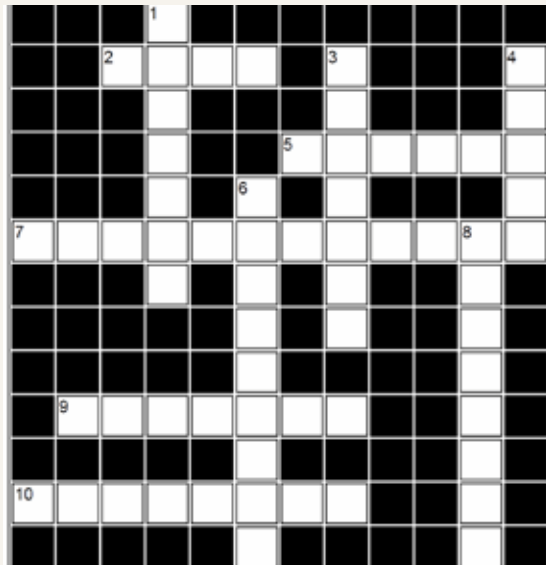
VODORAVNO

- Što je unija kružnice i njene unutrašnje oblasti?
- Naziv duži koja spaja bilo koje dvije tačke sa kružnice.
- Ugao čije je tjeme bilo koja tačka sa kružnice.
- Kakvi su međusobno centralni uglovi nad istim kružnim lukom?
- Kako se naziva prava koja sa kružnicom ima samo jednu zajedničku tačku?

USPRAVNO

- Najduža tetiva kruga.
- Kako se zove prava koja siječe kružnicu?
- Kakvi su periferijski uglovi nad prečnikom?
- Ugao čije tjeme sadrži centar kruga, a kraci sadrže poluprečnike.
- Što predstavlja skup tačaka u ravni koje su na jednakom rastojanju od jedne iste tačke te ravni?

<http://www.classtools.net/crossword/202205-hYHdHT>



PRILOG 2

ZADACI ZA RAD U PARU

- Izračunati obim kruga ako je dužina poluprečnika $2,5 \text{ cm}$.
- Izračunati obim kruga prečnika 7 cm .
- Izračunati poluprečnik kruga ako je dužina obima $37,68 \text{ cm}$.
(Uzeti da je $\pi \approx 3,14$)
- Dužina obima kružnice oko jednakostraničnog trougla je $12\pi \text{ cm}$.
Izračunati obim tog trougla.
- Izračunati dužinu obima upisane i opisane kružnice jednakostraničnog trougla čija je:
 - visina 6 cm ,
 - stranica $4\sqrt{3} \text{ cm}$.

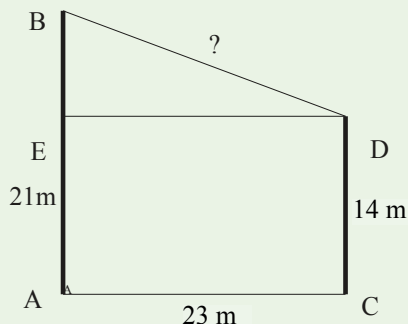
GEOMETRIJA U PRAKTIČNIM ZADACIMA

U prethodnim Dijagonalama učili smo primjenjivati matematička znanja u rješavanju konkretnih praktičnih zadataka. Ovo je izuzetno značajno, jer matematika se i uči da bismo mogli rješavati razne svakodnevne zadatke. U ovom članku ćemo koristiti znanja iz geometrije u rješavanju praktičnih zadataka. Za to nam je potrebno da znamo, na primjer, Pitagorinu teoremu, srednju liniju trapeza, sličnost trouglova...

Primjer 1. Na rastojanju 24 m rastu dva bora. Visina jednog je 21 m, a drugog 14 m. Koliko je rastojanje između njihovih vrhova?

Rješenje: 22,1 m.

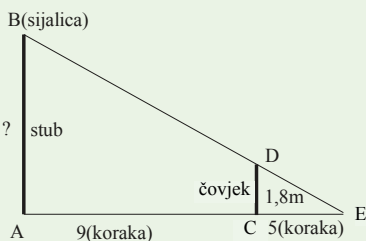
Uputstvo: Matematički model za ovaj zadatak je trapez ACDB (vidi sliku) kod kojeg treba izračunati dužinu kraka BD. Uočimo pravougli trougao BED, čije su katete $BE = AB - CD = 7\text{ m}$ i $DE = AC = 23\text{ m}$. Nepoznata je dužina hipotenuze BD. Saglasno Pitagorinoj teoremi imamo $BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} \approx 24,04\text{ m}$.



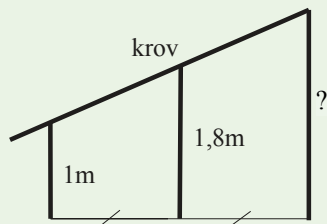
Primjer 2. Čovjek visine 1,8 m stoji na rastojanju 9 koraka od stuba na kojem visi sijalica. Sjenka čovjeka jednaka je 5 koraka. Na kojoj visini (u metrima) se nalazi sijalica?

Rješenje: 3,7 m (približno).

Uputstvo: Pravougli trouglovi BAE i DCE su slični (vidi sliku), pa je $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$, tj. $\frac{AB}{1,8} = \frac{14}{5}$, tj. $AB = 1,8 \cdot 2,08 \approx 3,7\text{ m}$.

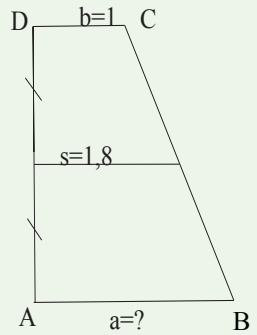


Primjer 3. Krov kuće se oslanja na tri vertikalna stuba čije osnove leže na jednoj pravoj. Srednji stub se nalazi na jednakim rastojanjima od malog i većeg stuba (vidi sliku). Ako je mali stub dužine 1 m, a srednji 1,8 m, kolika je dužina najdužeg stuba?



Rješenje: 2,6 m.

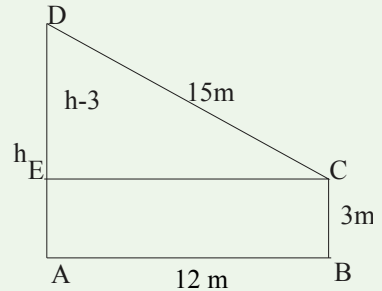
Uputstvo: Rješavanje zadatka se svodi na određivanje dužine jedne osnovice (a) trapeza ABCD (vidi sliku), kada su poznate dužine druge osnovice (b) i srednje linije (s): Kako je $b = 1$, $s = 1,8$ i $s = \frac{a+b}{2}$ (vidi sliku), to je $a = 2s - b$, tj. $a = 2,6$ m.



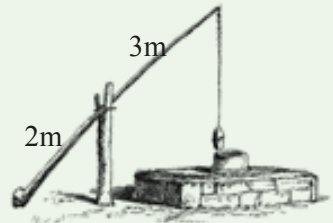
Primjer 4. Od stuba do kuće zategnuto je uže dužine 15 m i pričvršćeno je za zid kuće na visini 3 m od zemlje. Izračunati visinu stuba, ako je rastojanje od kuće do stuba jednako 12 m.

Rješenje: 9 m.

Uputstvo: Uočiti pravougli trougao DEC (vidi sliku, katete: $h-3$, 12, hipotenuza: 15), h-visina stuba. Primijeniti Pitagorinu teorem.

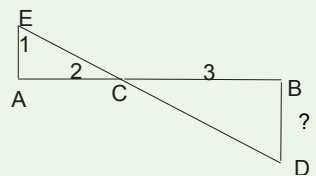


Primjer 5. Na slici je prikazan đeram. Kraći dio poluge tog đerama je 2 m, a duži 3 m (vidi sliku). Koliko metara će se spustiti kraj dužeg dijela poluge, kada se kraj kraćeg dijela poluge podigne 1 m?

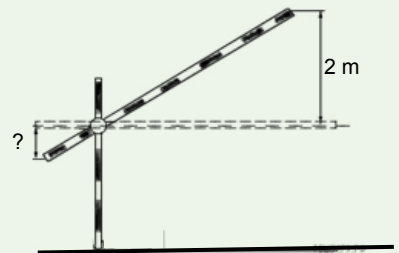


Rješenje: 1,5 m.

Uputstvo: Pravougli trouglovi EAC i BDC su slični, pa je $\frac{EA}{AC} = \frac{BD}{BC}$, odnosno $\frac{1}{2} = \frac{BD}{3}$, tj. $BD = 1,5$ m.



Primjer 6. Često se na putevima, parkinzima, naplatnim rampama, graničnim prelazima i sl. nalaze rampe (vidi sliku) koje ograničavaju prolazak vozila ili prolaznika sve dok se ne stvore određeni uslovi. Kraći dio poluge rampe ima dužinu 1 m, a duži 3 m. Na koju će se visinu (u metrima) spustiti kraj kraćeg dijela poluge, ako se kraj dužeg dijela podigne za 2 m?



34 Dijagonala

Rješenje: 67 cm (približno).

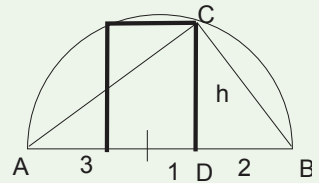
Uputstvo: Vidi prethodni primjer.

Primjer 7. Tunnel ima oblik polukruga poluprečnika 3 m. Koliko najviše može biti visok kamion, širine 2 m, da bi prošao kroz tunnel?

Rješenje: 2,8 m (približno).

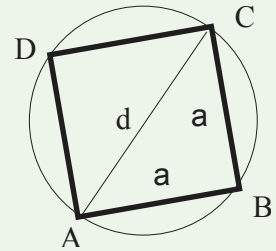
Uputstvo: Uočimo pravougle trouglove ADC i CDE (vidi sliku). Oni su slični, pa je $h^2 = AD \cdot DE = 4 \cdot 2 = 8$, tj. $h = \sqrt{8} \approx 2,8$.

Slijedi, svaki kamion koji je širok 2 m i visine manje ili jednake 2,8 m može proći kroz tunnel.

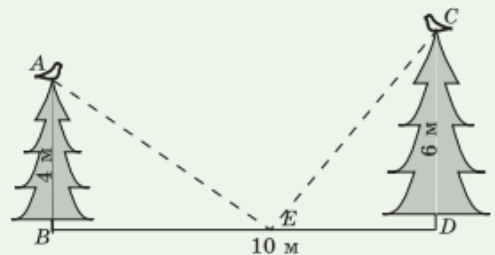


Primjer 8. Iz balvana oblika valjka, prečnika 32 cm, treba izraditi drveni stub u čijoj osnovi je kvadrat. Odrediti najveću dužinu stranice tog kvadrata.

Rješenje: Zadatak se svodi na izračunavanje stranice kvadrata koji se može upisati u kružnicu (vidi sliku). Kako je $2a^2 = d^2$, $d = 32$, to je $a = 18\sqrt{2} \approx 25,5$ cm.



Primjer 9. Na vrhovima dviju jela sjede dvije vrane. Jele su visoke 4 m i 6 m, a rastojanje među njima je 10 m. Na kojem rastojanju BE (vidi sliku) treba postaviti parče sira za te vrane, tako da one budu u ravnopravnim uslovima, tj. da su rastojanja od njih do sira jednaka?



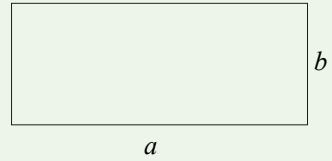
Rješenje: $BE = 6$ m.

Uputstvo: Neka je $BE = x$. Iz pravouglih trouglova ABE i EDC nalazimo da je $AE^2 = 16 + x^2$ i $CE^2 = 36 + (10 - x)^2$. Kako je $AE = CE$, to je $BE = 6$ m. Napomena: Kako je $AE = CE$, to se tačka E nalazi na simetrali duži AC.

Primjer 10. Koju najveću površinu može da ima pravougaoni plac obima 100 m?

Rješenje: 625.

Uputstvo: Označimo sa a i b dužine stranica placa (pravougaonika, vidi sliku). Površina placa je $P = ab$. Kako je njegov obim 100 m , to je $a + b = 50$, odnosno $P = a(50 - a) = -a^2 + 50a$.



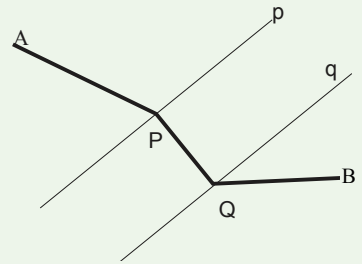
Dalje je $P = -(a - 25)^2 + 625 \leq 625$. Najveća vrijednost površine P je 625 i ona se dobija za $a = 25$, tj. kada je plac oblika kvadrata. Ovaj zadatak se može riješiti i na druge načine, na primjer, primjenom nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine. Podsjetimo se o kojoj nejednakosti se radi. Za nenegativne brojeve a i b važi nejednakost $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (1).

Jednakost se dostiže za $a = b$. Evo dokaza: Kako je $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, to je $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, odnosno $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Koristeći nejednakost (1) imamo da je $\sqrt{P} \leq \frac{a+b}{2} = 25$, tj. $P \leq 625$.

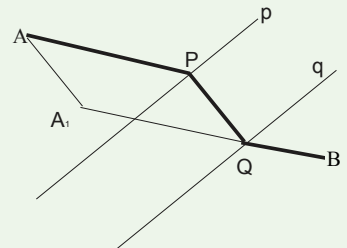
Jednakost $P = 625$ se postiže za $a = b = 25$ (kvadrat).

Razni konstruktivni zadaci korisno mogu poslužiti u rješavanju mnogih praktičnih zadataka. Navodimo tri takva slučaja.

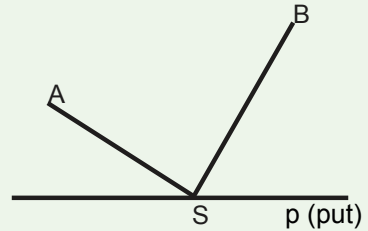
Primjer 11. Na rijeci treba izgraditi most između naselja A i B (vidi sliku) tako da dužina $d = AP + PQ + QB$ bude minimalna (PQ je normalno na obale rijeke koje se smatraju paralelnim).



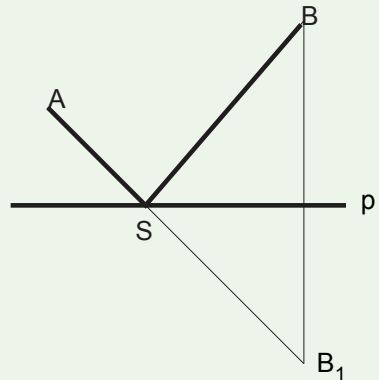
Uputstvo: Konstruisati tačku A_1 tako da je duž AA_1 normalna na pravu p i da je jednaka duži PQ . Zatim konstruisati pravu (A_1B) i odrediti njen presjek sa pravom q . Tačku presjeka označimo sa Q . Iz tačke Q podići normalu do presjeka sa pravom p i odrediti tačku presjeka P . Zbir duži AP , PQ i QB je najmanji koji zadovoljava uslove zadatka.



Primjer 12. Sela A i B nalaze se sa iste strane pravolinijskog puta (vidi sliku). U kojoj tački S na putu p treba izgraditi autobusko stajalište tako da zbir rastojanja $AS+SB$ bude najmanji?



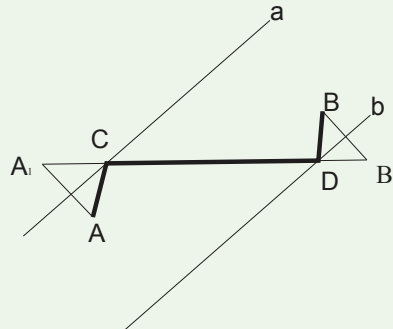
Rješenje: Konstruisati tačku B_1 simetričnu tački B u odnosu na pravu p. Zatim odrediti presjek prave (AB_1) sa pravom p, tačku presjeka označimo sa S. Tačka S zadovoljava uslove zadatka.



Primjer 13. Na rijeci se nalaze dva ostrva A i

B. Turisti, koji se nalaze na ostrvu A, žele da odu do ostrva B, a da prije toga posjete obje obale rijeke. Koje najmanje rastojanje moraju preći turisti (smatrati da su obale rijeke paralelne prave, a ostrva A i B tačke)?

Uputstvo: Označimo sa a i b obale rijeke (vidi sliku). Konstruisati tačku A_1 (B_1) simetričnu tački A (B) u odnosu na pravu a (b). Zatim konstruisati pravu (A_1B_1) i odrediti njen presjek sa pravom a (tačka C) i pravom b (tačka D). Najkraće rastojanje je ACDB.



Na kraju, nekoliko zadataka za samostalni rad.

1. Požarne merdevine su naslonjene na prozor kuće na visini 12 m od zemlje. Donji kraj merdevina nalazi se 5 m od zida kuće. Kolika je dužina merdevina?

Rješenje: 13 m.

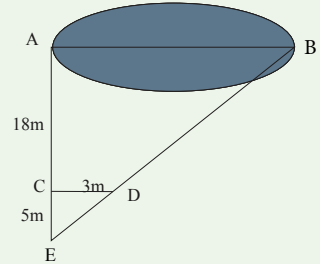
2. Gornji dio merdevina, naslonjenih na zid kuće visine 2,80 m, zahvata sa zidom kuće ugao od 60° . Kolika je dužina merdevina?

Rješenje: 5,60 m.

3. Dječak je krenuo iz kuće u pravcu istoka 650 m , a zatim je skrenuo u pravcu sjevera 550 m . Na kojem je rastojanju dječak od kuće?

Rješenje: $852,5\text{ m}$ (približno).

4. Koristeći podatke na slici izračunati dužinu jezera.



Rješenje: $13,8\text{ m}$.

Uputstvo: $\frac{AB}{23} = \frac{3}{5}$, $AB = 13,8$.

5. Iz balvana oblika valjka treba izgraditi stub u čijoj je osnovi pravougaonik sa dimenzijama 25 cm i 20 cm . Koliko najmanje mora biti prečnik balvana?

Rješenje: $2,1$ (približno).

LEONARDO FIBONAČI

Leonardo Fibonači je bio italijanski matematičar iz Pize. Bavio se proučavanjem hindu-arapskog brojnog sistema. Znanja o ovom sistemu stekao je u Alžiru, a putujući obalama Mediterana saznao je i njegove prednosti u odnosu na druge brojne sisteme.

Dvije godine nakon povratka u svoj rodni grad, dovršava pisanje knjige „Liber Abaci” (Knjiga o abakusu) u kojoj se nalaze njegova otkrića tokom putovanja.

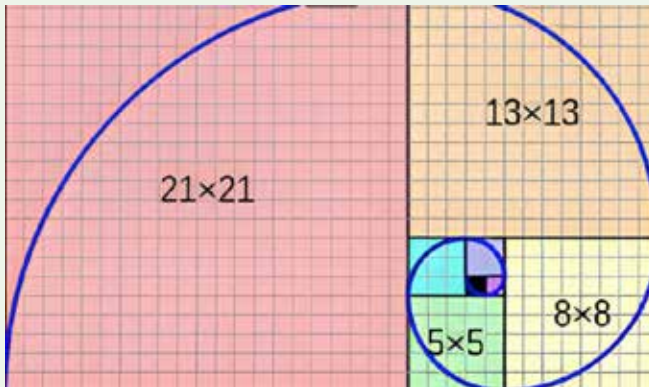
U 55. godini života objavljuje svoje najpoznatije djelo pod nazivom „Liber Quadratorum” koje se zasniva na rješavanju kvadratnih jednačina. Ovdje Leonardo uvodi specifične brojeve nazvane kongruentima, definisane kao $c = mn(m^2 - n^2)$, gdje je $m > n$.



38 Dijagonala

Ovi brojevi se takođe pojavljuju i u Fibonačijevoj jednačini:
 $1/2 (m^2 + n^2) \pm mn (m^2 - n^2) = 1/2 ((m^2 - n^2) \pm mn)^2$.

Najpoznatije Fibonačijevo otkriće jeste Fibonačijev niz. Ovaj matematički niz uočen je u raznim fizičkim, biološkim, kao i hemijskim pojavama. On karakteriše niz brojeva u kojem zbir prethodna dva broja daje vrijednost sledećeg člana niza.



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Fibonači je 1202. godine u knjizi Liber Abaci naveo zadatak koji na jednostavan način objašnjava takozvani Fibonačijev niz. Naime, on je želio da izračuna kako će se uvećavati populacija zečeva koji žive na jednom polju. Fibonači je zamislio da je u polje pušten par zečeva – mužjak i ženka. Kada dostignu uzrast od mjesec dana, oni se pare, i na kraju drugog mjeseca se razmnože tako da izrode još jedan par zečeva, mužjaka i ženku. Fibonači je pretpostavio da zečevi nikad ne uginu i da ženka svakog mjeseca okoti dva mladunca, mužjaka i ženku. U zadatku se traži koliko će parova zečeva biti na ovom polju po isteku prve godine.

Po isteku prvog meseca, naš par zečeva taman je stasao za parenje, ali se ženka još nije okotila i na polju su i dalje samo 2 zeca, to jest jedan par. Na kraju drugog mjeseca, ženka je okotila mužjaka i ženku, pa sada imamo 2 para zečeva. Na kraju trećeg mjeseca, mama zečica ponovo je okotila par zečeva, a njena ćerka ima mjesec dana i spremna je za parenje. Sada imamo 3 para zečeva. Na kraju četvrtog mjeseca, najstarija ženka ponovo je okotila par zečeva. Njena najstarija ćerka takođe je okotila par zečeva. Mlađa ćerka je napunila mjesec dana i stasala je za parenje. Imamo ukupno 5 parova zečeva. Dakle populacija zečeva na polju raste na sljedeći način: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... a svaki sledeći član niza jednak je zbiru prethodna dva.

Fibonačijev niz ima još neke neobične osobine. Ako podijelimo svaki broj u nizu sa onim koji mu prethodi, dobijamo rezultate koji teže vrijednosti zlatnog presjeka.

**SPISAK PRVIH 5 UČENIKA KOJI SU TAČNO RIJEŠILI NAGRADNI ZADATAK
SA NASLOVNE STRANE IZ PROŠLOG BROJA DIJAGONALE:**

1. **Nađa Marojević**, učenica VI-1, JU OŠ „Milija Nikčević“ – Nikšić
2. **Dajana Međedović**, učenica VIII-1, JU OŠ „Radojica Perović“ – Podgorica
3. **Ana Radunović**, učenica VIII-3, JU OŠ „Anto Đedović“ – Bar
4. **Nikola Milićević**, učenik IX-5, JU OŠ „Vuk Karadžić“ – Berane
5. **Ilija Mušović**, učenik VI-2, JU OŠ „Risto Ratković“ – Bijelo Polje

Redakcija časopisa sve njih nagrađuje besplatnim primjerkom Dijagonale broj 20.

Štampanje ovog broja pomogli su:



DOMEN d.o.o.
PODGORICA



Imate prijatelje!
MTEL d.o.o. – PODGORICA



BEMAX
BEMAX d.o.o.
PODGORICA

HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale“ će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.

Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**“ i „**Narodnoj knjizi**“. Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **510-206991-61** kod CKB banke.

Adresa redakcije je: **Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.**

Mejl: **udruznastmatem@gmail.com**

www.unmcg.wordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536-5851



9 772536 585009 >