Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €

NAGRADNI ZADATAK JE NA STRANI 31

BROJ 18 - GODINA 2022.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 18**

Godina 2022. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik: *mr Radomir Božović*

Odgovorni urednik: *Danijela Jovanović*

Redakcija: *Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Anđa Vujović, Milan Rosandić, Nikola Radojičić, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*

Lektura: *Milja Božović, prof.*

Korektura: *Danijela Jovanović, prof.*

Priprema za štampu: *Branko Gazdić*

Tiraž: *1000*

Štampa: *„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Sadržaj

Mr Radomir Božović

SIMETRIČNI BROJEVI

O nekim specifičnostima u skupu prirodnih brojeva smo pisali u prethodnim brojevima. Pominjali smo parne i neparne brojeve, muške i ženske, prijateljske i neprijateljske, savršene, itd. Ovom prilikom pišemo o simetričnim brojevima.

Neka je dat prirodan broj *a*. Ako se prirodan broj *b* dobija tako što se cifre broja *a* napišu obrnutim redom, onda se za brojeve *a* i *b* kaže da su **uzajamno simetrični**. Na primjer, brojevi $a = 36$ i $b = 63$ ili $a = 147$ i $b = 741$ su parovi uzajamno simetričnih brojeva. Simetrične brojeve kod kojih je nula na mjestu cifre jedinica ne razmatramo, jer bi onda nula morala biti prva cifra simetričnog broja, a kako nijedan prirodan broj ne počinje nulom, ti brojevi ne bi imali isti broj cifara, pa nijesu simetrični.

Neki brojevi su simetrični sami sebi, tj. kada ih čitamo obrnutim redosljedom dobija se isti broj. Na primjer, brojevi 131, 2992, 43634, 77777 su primjeri simetričnih brojeva.

Simetrični brojevi se još nazivaju i **palindromi**, po analogiji sa riječima ili rečenicama koje se isto čitaju s lijeva u desno kao i s desna u lijevo. Poznati palindromi su: POP, RADAR, KAJAK, SIR IMA MIRIS, ANA VOLI MILOVANA, itd.

Zadaci u vezi sa parovima simetričnih brojeva.

1) Odrediti broj: a) trocifrenih; b) četvorocifrenih palindromnih brojeva.

Rješenje:

a) Trocifreni palindromni brojevi su oblika $\overline{aba}$. Kako prvu cifru možemo birati na 9 načina, jer $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i drugu cifru na 10 načina, jer $b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, to po pravilu množenja ukupan broj palindromnih trocifrenih brojeva je $9 \cdot 10 = 90$.

b) Četvorocifreni palindromni brojevi su oblika $\overline{abba}$, što znači da su određeni sa prve dvije cifre. Slično kao u primjeru a) zaključujemo da je i njih 90.

2) Odrediti broj parova različitih uzajamno simetričnih dvocifrenih brojeva.

Rješenje:

Dvocifrenih brojeva je 90. Svaki dvocifreni broj koji se ne završava nulom ima uzajamno simetričan broj. Dakle, kada od dvocifrenih brojeva odbacimo one koji se završavaju nulom, a takvih je 9, ostaje 81 broj. Od njih ćemo ukloniti i one brojeve sa istim ciframa, jer nijesu različiti simetrični, a takvih je 9. Ostala su 72 broja, a parova uzajamno simetričnih i različitih dvocifrenih brojeva je 72.

3) Dokazati da je zbir dva uzajamno simetrična broja djeljiv sa 11, a njihova razlika sa 9.

Rješenje:

Uzajamno simetrični dvocifreni brojevi imaju oblik $\overline{ab}$ i $\overline{ba}$. Za zbir važi:

$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$, a za razliku imamo:

$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9 \cdot (a - b)$, što je trebalo dokazati.

4) Dokazati da je razlika dva četvorocifrena uzajamno simetrična broja iste parnosti, djeljiva sa 18.

Rješenje:

Neka su $\overline{abcd}$ i $\overline{dcba}$ četvorocifreni brojevi iste parnosti (cifre a i d su obje parne ili obje neparne). Kako je $a - d$ paran broj, u razlici $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a = 999(a - d) + 90(b - c)$ oba člana su djeljiva sa 9 i 2, pa i sa 18, što je trebalo dokazati.

5) Naći par uzajamno simetričnih četvorocifrenih brojeva ako je jedan od njih 9 puta manji od drugog.

Rješenje:

Označimo manji broj sa x. Taj broj nije veći od 1111, jer je 9x četvorocifreni broj. Završava se cifrom 9, jer se 9x završava cifrom 1 i djeljiv je sa 9, jer brojevi x i 9x imaju isti zbir cifara. Taj broj ima oblik $\overline{1bc9}$, pa je zbir druge i treće cifre jednak 8, što znači da druga cifra mora biti 0. Dakle, treća cifra je 8 i traženi broj je 1089, pri čemu je $1089 \cdot 9 = 9801$.

6) Naći sve parove uzajamno simetričnih brojeva čiji je proizvod osmocifren broj koji se završava sa tri nule.

Rješenje:

Neka su $x = \overline{abcd}$ i $y = \overline{dcba}$ traženi brojevi. Kako je proizvod ta dva broja djeljiv sa 1000, mora jedan od tih brojeva biti djeljiv sa $5^3 = 125$, a drugi sa $2^3 = 8$. Nijedan od ta dva broja ne može biti djeljiv sa 5 i sa 2, jer bi se takav broj završavao sa nulom. Brojevi koji su djeljivi sa 125 se završavaju sa: 125, 375, 625, 875. Razmatrajući svaki slučaj posebno i znajući da brojevi $\overline{521a}$, $\overline{573a}$, $\overline{526a}$, $\overline{578a}$ moraju biti djeljivi sa 8, zaključujemo da x može biti bilo koji od brojeva 6125, 6375, 4625, 4875. Tim brojevima odgovaraju redom njima uzajamno simetrični brojevi 5216, 5736, 5264, 5784.

7) Da li zbir dva uzajamno simetrična broja može biti 2013-tocifren broj čije su sve cifre devetke?

Rješenje:

Ako sabiramo dva uzajamno simetrična broja čiji je zbir 2013-tocifren broj kome su sve cifre devetke, uočavamo da je zbir cifara u svakoj koloni jednak 9 i da ne može biti prenosa. Znači da je zbir cifara dobijenog zbira dva puta veći od zbira cifara jednog sabirka, tj da je paran broj. Međutim, zbir cifara dobijenog 2013-tocifrenog broja je $2013 \cdot 9$, što je neparan broj, pa je odgovor na pitanje iz zadatka negativan.

8) Naći najmanji trocifreni broj palindrom čiji je zbir sa najmanjim dvocifrenim palindromom takođe palindrom.

Rješenje:

Najmanji dvocifreni palindrom je 11. Najmanji trocifreni palindrom je oblika $\overline{1a1}$. Ako je $a < 9$ zbir će biti oblika $\overline{1b2}$, gdje je $b = a + 1$, pa taj zbir neće biti palindrom. Preostaje da je $a = 9$, pa je $191+11 = 202$ palindrom. Dakle, traženi broj je 191.

9) Odrediti parove trocifrenih palindroma koji se zapisuju pomoću dvije različite cifre čija je razlika trocifren broj zapisan sa tri uzastopne cifre.

Rješenje:

Neka $\overline{aba} = 100a + 10b + a$ i $\overline{bab} = 100b + 10a + b$ čine traženi par, pri čemu je $a > b$. Njihova razlika je $\overline{aba} - \overline{bab} = 91 \cdot (a - b)$, gdje je $1 \leq a - b \leq 8$. Neposrednom provjerom nalazimo da je dati uslov ispunjen samo za $a - b = 6$, pa dobijamo tražene parove: 717 i 171, 828 i 282, 939 i 393. Razlika u sva tri slučaja je $91 \cdot 6 = 546$.

10) Odrediti sve četvorocifrene palindrome sa tačno 5 različitih prostih djelilaca.

Rješenje:

Palindrom ne može da sadrži istovremeno proste činioce 2 i 5, jer bi se završavao cifrom 0. Takođe, uočava se da je traženi broj proizvod pet različitih prostih brojeva. Ako bi se neki od tih prostih faktora pojavljivao stepenovan nekim brojem većim od 1, taj proizvod bio bi bar petocifren, jer proizvod pet najmanjih prostih brojeva različitih od 5 jednak je $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 6006$. Taj proizvod je četvorocifreni palindrom. Još jedno rješenje dobijamo kada 13 zamijenimo sa 19. Dakle, imamo dva rješenja: 6006 i $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 = 8778$.

11) Dužina stranice kvadrata izražena u *cm* je prost broj, a površina tog kvadrata jednaka je zbiru dva dvocifrena uzajamno simetrična broja. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Neka je $\overline{ab} = 10a + b$ i $\overline{ba} = 10b + a$, par traženih uzajamno simetričnih brojeva, pri čemu je $a > b$. Tada je $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a + b)$, a kako je 11 prost broj i $3 \leq a + b \leq 17$, jedino je moguće da je $a + b = 11$. Znači, dužina stranice kvadrata je 11 *cm*, a površina $11 \cdot 11 = 121$ cm^2. Sada za cifre a i b postoje sledeće mogućnosti: i) $a = 9$, $b = 2$; ii) $a = 8$, $b = 3$; iii) $a = 7$, $b = 4$; iv) $a = 6$, $b = 5$. Traženi parovi uzajamno simetričnih brojeva su: (92, 29), (83, 38), (74, 47), (56, 65).

12) Obim pravougaonika jednak je 806 *cm*. Odrediti dužine njegovih stranica (u *cm*) ako je poznato da su te dužine dva uzajamno simetrična broja.

Rješenje:

Jasno je da su dužine stranica dva trocifrena uzajamno simetrična broja čiji je zbir jednak 403. Iz $\overline{abc} + \overline{bca} = 101(a + c) + 20b = 403$, lako nalazimo da je $a + c = 3$ i $b = 5$. Dakle, tražene dužine stranica su 251 *cm* i 152 *cm*.

13) Dužina ivice kocke je cijeli broj centimetara, a zapremina je (u cm^3) jednaka razlici dva dvocifrena uzajamno simetrična broja. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Neka su $\overline{ab} = 10a + b$ i $\overline{ba} = 10b + a$ traženi brojevi, pri čemu je $a > b$. Tada je zapremina kocke jednaka razlici: $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) = 3 \cdot 3 \cdot (a - b)$. Odavde zaključujemo da je $a - b = 3$, pa za par cifara a, b postoje mogućnosti: (9, 6), (8, 5), (7, 4), (6, 3), (5, 2), (4, 1). Lako nalazimo šest parova traženih brojeva: (96, 69), (85, 58), (74, 47), (63, 36), (52, 25), (41, 14).

14) Da li postoji kocka sa ivicom cjelobrojne dužine (u *cm*) čija je zapremina (u cm^3) jednaka zbiru dva dvocifrena uzajamno simetrična broja?

Rješenje:

Posmatrajmo zbir dva dvocifrena uzajamno simetrična broja: $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a + b)$, gdje su a i b jednocifreni brojevi. Izraz $11(a + b)$ ne može biti kub prirodnog broja, pa je odgovor na pitanje iz zadatka negativan.

15) Dužine stranica pravougaonika su trocifreni palindromi $\overline{aba}$ i $\overline{bab}$. Odrediti obim tog pravougaonika ako je poznato da je on, takođe, trocifren palindrom.

Rješenje:

Traženi obim jednak je $2(\overline{aba} + \overline{bab}) = 2 \cdot 111(a + b)$, što je trocifreni broj samo za $a + b = 3$ ili $a + b = 4$. U prvom slučaju je obim jednak 666 (stranice 121 i 212), u drugom 888 (131 i 313).

Zadaci za vježbu

1) Odrediti najmanji četvorocifreni palindrom čiji je zbir sa najmanjim dvocifrenim palindromom takođe palindrom.
2) Odrediti broj: a) petocifrenih; b) 2012-tocifrenih; c) n-tocifrenih palindroma.
3) Odrediti broj parova uzajamno simetričnih:

   a) trocifrenih; b) četvorocifrenih; c) n-tocifrenih brojeva.
4) Dokazati da ne postoji jednakostraničan trougao kod koga su dužina stranice i obim dva četvorocifrena uzajamno simetrična broja.
5) Odrediti dužinu stranice kvadrata, ako je poznato da su dužina i obim kvadrata (izraženi u *cm*) dva četvorocifrena uzajamno simetrična prirodna broja.
6) Dužina stranice kvadrata u *cm* je cijeli broj, a njegova površina izražena u cm^2 je trocifreni palindrom. Izračunati obim tog kvadrata.
7) Odrediti dužinu ivice kocke u *cm* ako je poznato da je zapremina kocke izražena u cm^3 zbir dva trocifrena uzajamno simetrična broja.
8) Odrediti par uzajamno simetričnih petocifrenih brojeva ako je jedan od njih 9 puta manji od drugog.
9) Dokazati da ni jedan prirodan broj ne može biti dva puta veći od njemu simetričnog broja.
10) Neka je n zbir dva petocifrena uzajamno simetrična broja. Dokazati da je bar jedna cifra broja n parna.

Dr Goran Šuković

DINAMIČKO PROGRAMIRANJE

(II dio)

U prethodnoj lekciji upoznali smo se sa dinamičkim programiranjem, koje je popularna tehnika u programiranju kojom značajno možemo smanjiti složenost algoritma. Ova tehnika se često koristi za nalaženje optimalnog rješenja (najboljeg rješenja tj. najkraćeg ili najdužeg ili najmanjeg ili najvećeg i sl.). Dinamičko programiranje, rješavanje jednog problema svodi na rješavanje podproblema koji najčešće nijesu nezavisni. Postoje i druge tehnike rješavanja problema, kao npr. „podijeli pa vladaj" (engleski „divide and conquer"), koje vrše podjelu polaznog problema na podprobleme, ali su ti problemi međusobno nezavisni. U oba slučaja kažemo da postoji optimalna podstruktura problema (eng. „optimal substructure"). Važna osobina dinamičkog programiranja jeste da se svaki podproblem rješava najviše jednom. Često se rješenja podproblema čuvaju u tabelama ili nizovima, pa se ovaj metod ponekad naziva i tablični metod.

Rješenje zasnovano na dinamičkom programiranju možemo ukratko predstaviti sa sljedeća 4 koraka:

1. Opisati strukturu optimalnog rješenja ili kako se često kaže, opisati stanje problema.
2. Rekurzivno definisati optimalnu vrijednost tj. definisati prelazak iz jednog stanja u drugo.
3. Izračunati optimalnu vrijednost problema, najčešće od prostijih ka složenijim stanjima (metoda „odozdo na gore", engleski „bottom-up").
4. Rekonstruisati optimalno rješenje.

Primjenom prva tri koraka dobijamo optimalnu vrijednost, dok četvrti korak izvršavamo ukoliko je potrebno i samo optimalno rješenje.

Postoji velika klasa zadataka koja može efikasno biti riješena primjenom ovog metoda.

Zadatak 1:

Maksimalna suma nesusjednih elemenata u nizu: Dat je niz a prirodnih brojeva dužine n. Odrediti podniz datog niza čiji je zbir elemenata maksimalan, a u kome nema susjednih elemenata.

Podproblem zadatog problema možemo definisati na sljedeći način: odrediti podniz nesusjednih elemenata na nekon dijelu polaznog niza a. U tu svrhu definišimo novi niz d tako da važi:

```
d[k] = maksimalan zbir nesusjednih elemenata niza
       [a1, a2, ..., ak], za svako k između  1 i n.
```

Rješenje polaznog problema biće d[n].

U ovom slučaju lako smo odredili optimalnu podstrukturu polaznog problema. U opštem slučaju, algoritam za definisanja podproblema ne postoji i zavisi od same prirode problema.

Definišimo sada rekurzivnu formulu za izračunavanje vrijednosti niza d.

Pretpostavimo da smo izračunali vrijednosti d[1], d[2], …, d[k-1] i sada želimo da izračunamo d[k].

Poslije dodavanja novog elementa a_k, za traženu optimalnu vrijednost podniza (a_1, a_2, ... ,a_k) imamo dvije mogućnosti:

- element a_k uključujemo u traženu sumu,
- element a_k ne uključujemo u traženu sumu.

Elemente sa indeksima 1, ... ,k−2 koristimo u oba slučaja, jer na njih ne utiče činjenica da li je element k ušao u podniz ili ne.

Ukoliko uključimo a_k tada element a_{k-1} ne može ući u sumu, jer je susjedan sa a_k, u suprotnom, element a_{k-1} možemo uključiti u sumu. Ovo možemo zapisati sljedećom formulom:

$$d[k] = \max\{d[k-1],\ a_k + d[k-2]\}, \text{ za } k \geq 3$$

Ostaje da još definišemo d[1] i d[2]. Lako se vidi da je d[1] = a_1 i d[2] = max{a_1 , a_2}. Sada je lako, pomoću jednog ciklusa, izračunati sve elemente niza d.

Algoritam

Ulaz: Niz a prirodnih brojeva dužine n

Izlaz: pne - podniz nesusjednih elemenata sa najvećom sumom

```
if n = 1 then
return pne = a;
end
d[1] = a1;
d[2] = max{a1 , a2 };
for k ← 3 to n do
```

```
if d[k - 1] > d[k - 2] + a[k] then
d[k] = d[k - 1];
else
d[k] = d[k - 2] + a[k];
end
pne = Ø;
ind = n;
while (ind > 0) do
if d[ind] != d[ind - 1] then
add a[ind] to pne;
ind = ind - 2;
else
ind = ind - 1;
end
end
return pne
```

Za rekonstrukciju rješenja potrebno je da znamo da li je za vrijednost d[k] element a_k ušao u podniz ili nije. Idemo kroz niz unazad i dobijamo optimalni podniz u obrnutom poretku. Ako bi element a_n pripadao traženom podnizu, tada bi vrijednost d[n] bila jednaka $d[n - 2] + a_n$, pa ispitujemo element sa indeksom $n - 2$; u suprotnom n-ti element ne pripada traženom podnizu, pa zato prelazimo na element a_{n-1}. Lako se provjerava da je broj koraka opisanog algoritma proporcionalan dužini niza tj, O(n).

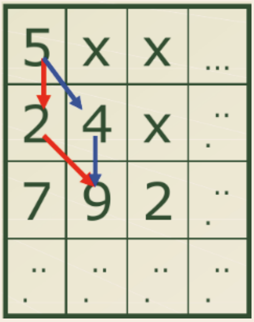
Provjerite da ako je dat niz a = [1, 1, 2, 8, 11, 3, 1], tada će niz d biti [1, 1, 3, 9, 14, 14, 15].

Pokušajte sami da napišete C++ program na osnovu datog algoritma a zatim i rekurzivnu funkciju koja izračunava elemente niza d.

Zadatak 2:

Maksimalni zbir elemenata u tabeli: Data je kvadratna matrica (tabela) koja se sastoji od prirodnih brojeva. Pion se nalazi u gornjem lijevom uglu i može se kretati jedno polje dolje ili jedno polje dijagonalno dolje-desno. Cilj je doći do donjeg reda tako da je zbir brojeva na putu maksimalan.

Prvo je potrebno uočiti da li dati problem ima optimalnu podstrukturu. Pogledajte matricu sa slike.



Da li je moguće da crveni put bude dio optimalnog rješenja? Jasno je da ne može i taj zaključak nam pomaže da definišemo stanja našeg problema.

Definišimo matricu dp[r][s] kao vrijednost najboljeg puta od gornjeg lijevog ugla do pozicije (r, s) u matrici.

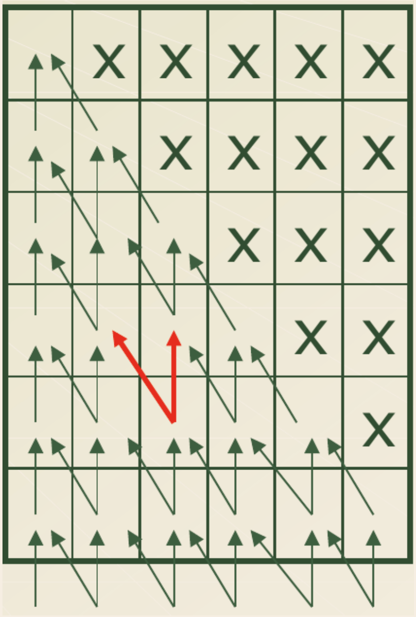
Lako se vidi da je:

```
dp[r][s] = max{dp[r-1][s] + dp[r-1][s-1]} + A[r][s]
```

Rješenje je:

```
max{dp[n-1][i] za 0 <= i < n }
```

Kako ćemo popunjavati matricu dp? Svi preduslovi za izračunavanje elemenata matrice dp su prikazani na slici:



Možemo prvo s lijeva na desno izračunati vrijednosti matrice dp u prvom redu, zatim opet slijeva nadesno u drugom redu, i tako dalje dok ne dođemo do n-tog reda. C++ program koji izračunava matricu dp je sljedeći:

```
dp[0][0] = A[0][0];
for (int r = 1; r < n; r++) {
   dp[r][0] = dp[r-1][0] + A[r][0];
   for (int c = 1; c <= r; c++) {
         dp[r][c] = max(dp[r-1][c], dp[r-1][c-1]);
         dp[r][c] += A[r][c];
   }
}
int best = 0;
for (int i = 0; i < n; i++)
   best = max(best, dp[n-1][i]);
```

Zadaci za vježbu

1. Problem maksimalnog zbira u matrici: Data je matrica a dimenzije n × m popunjena cijelim brojevima. Sa svakog polja u matrici dozvoljeno je preći samo na polje ispod ili na polje desno od tog polja (ukoliko postoje). Potrebno je izabrati put od gornjeg lijevog polja (polja sa koordinatama (0, 0)), do donjeg desnog polja (polja sa koordinatama (n-1, m-1)), tako da zbir brojeva u poljima preko kojih se ide, bude maksimalan.
2. Mirko ima ruksak u koji stane maksimalno N kilograma prije nego što pukne kaiš. Na raspolaganju ima M predmeta od kojih svaki ima svoju masu Ti i vrijednost Vi. Svakog predmeta ima beskonačno mnogo. Ruksak je prazan pa u njega treba smjestiti predmete tako da zbir vrijednosti svih predmeta bude maksimalan.

Primjer:

6 2
3 4
5 7

U ruksak stane 6 kilograma, a na raspolaganju imamo 2 predmeta: predmet mase 3 kilograma, vrijednosti 4 i predmet mase 5 kilograma vrijednosti 7.

Potrebno je štampati najveći mogući zbir vrijednosti u ruksaku.

Rješenje:

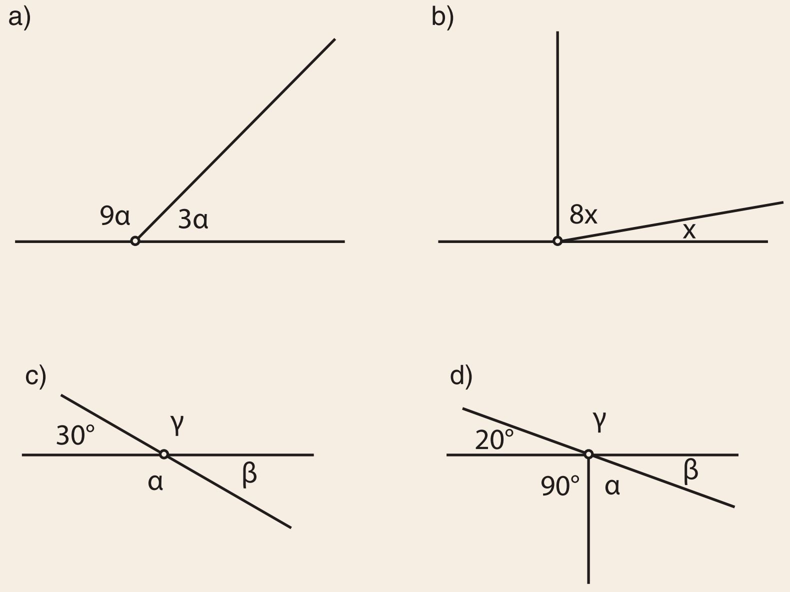
8 (više se isplati uzeti dva predmeta mase 3, nego jedan predmet mase 5 kilograma).

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

Uglovi. Razlomci.

1. Koji dio kružnice odgovara centralnom uglu od:
   a) $30°$; b) $45°$; c) $120°$; d) $300°$?
2. Pretvoriti mjerene jedinice:
   $4° =$ ______' $180'' =$ ______' $15' =$ ______'' $39600'' =$ ______°
   $7' =$ ______'' $3600000'' =$ ______° $12° =$ ______' $10800'' =$ ______°
3. Dati su uglovi $\alpha = 143°24'44''$ i $\beta = 59°15'$. Izračunati sljedeće uglove:
   a) $3\cdot\beta + \alpha$; b) $\alpha - 2\cdot\beta$; c) $\beta : 5$; d) $\alpha : 4$.
4. Nacrtati pomoću uglomjera uglove $\alpha = 63°$, $\beta = 115°$ i $\gamma = 90°$, a zatim grafički odrediti uglove: a) $3\cdot\alpha-\gamma$; b) $\beta + \gamma - 2\cdot\alpha$.
5. Dat je ugao $\alpha = 27°42'24''$. Odrediti mjeru njemu:
   a) komplementnog; b) suplementnog; c) unakrsnog ; d) uporednog ugla.
6. Ugao β je za 3225' manji od svog komplementnog ugla. Izračunati ugao suplementan uglu β.
7. Odrediti mjere uglova sa slike:

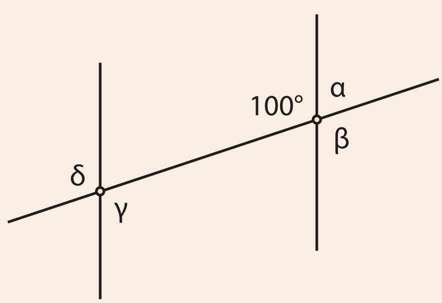


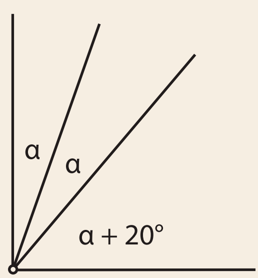
8. Iz skupa $A = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{4}{2}, \frac{6}{5}, \frac{3}{3}, \frac{15}{2}, \frac{7}{8}, \frac{17}{20}, \frac{5}{5}, \frac{8}{4}, \frac{7}{7} \right\}$ izdvojiti:
   a) prave razlomke; b) neprave razlomke;
   c) razlomke jednake 1; d) razlomke jednake 2.
9. Napisati u obliku nesvodljivog razlomka: a) 15 min = ________ h;
   b) 50 min = ________ h; c) 28 cm = ______ m; d) 750 m = _______ km.
10. Napisati 6 razlomaka koji se na brojevnoj polupravoj nalaze između razlomaka $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{5}$.
11. Proširiti razlomke $\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2}$ i $\frac{15}{16}$ tako da svaki od njih ima brojilac 45 a zatim ih poređati po veličini.
12. Poređati razlomke $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ i $\frac{7}{18}$ od najvećeg do najmanjeg svodeći ih na isti imenilac.
13. Milan je potrošio $\frac{5}{8}$ svoje ušteđevine i kupio jaknu od 90 eura. Koliko je imao ušteđevine? Koliko mu je ostalo?

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

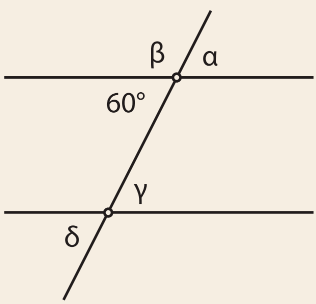
1. a) Od 25 eura, koliko je Risto imao, potrošio je $\frac{3}{5}$, a $\frac{1}{2}$ ostatka je pozajmio drugu. Koliko mu je još ostalo? b) Od kog broja $\frac{8}{9}$ iznosi 72?
2. Na brojevnoj polupravoj, prikazati sljedeće razlomke: $\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, \frac{11}{6}, \frac{3}{3}, \frac{6}{2}$ i $\frac{5}{2}$, a potom te razlomke poređati od najmanjeg do najvećeg.
3. Dati su uglovi: $\alpha = 39° 42' 43''$ i $\beta = 47° 38' 26''$.
   Izračunati: a) $2\alpha - \beta$; b) $\beta : 2$; c) komplement ugla β.
4. Dopuniti: a) $6° =$ ________ $'$; b) $200' =$ ______ $°$ ______ $'$;
   c) $3'12'' =$ ______ $''$; d) $7500'' =$ ______ $°$ _____ $'$.
5. Odrediti nepoznate uglove sa slike:

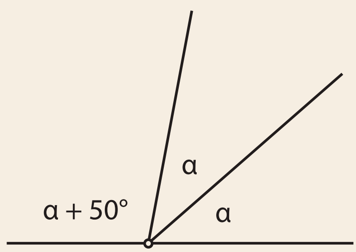




II grupa

1. a) Od 32 eura, koliko je Hana imala, potrošila je $\frac{1}{4}$, a $\frac{2}{3}$ ostatka je pozajmila drugarici. Koliko joj je još ostalo? b) Od kog broja $\frac{2}{7}$ iznosi 36?
2. Na brojevnoj polupravoj prikazati razlomke: $\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{6}, \frac{2}{2}, \frac{6}{3}$ i $\frac{5}{2}$, a potom date razlomke poređati od najvećeg do najmanjeg.
3. Dati su uglovi: $\alpha = 57° 34' 38''$ i $\beta = 65° 43' 34''$. Izračunati:
   a) $\alpha + 2\beta$; b) $\alpha : 2$; c) suplement ugla α.
4. Dopuniti: a) $5° =$ _________ $'$; b) $350' =$ _____ $°$ _____ $'$;
   c) $2'37'' =$ _______ $''$; d) $8100'' =$ ____ $°$ _____ $'$.
5. Odrediti nepoznate uglove sa slike:





Jasna Maraš, JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić

VII razred

Jednačine i nejednačine u skupu Z. Trougao.

1. Izračunati vrijednost izraza:
   a) $24 : (-6) - 15 : (-3) - 20 : (-5)$,
   b) $-72 : 4 + 3 \cdot \{-64 : 4 - 3 \cdot [-5 + 2 \cdot (-28 : 2 + 9 - 18 : 6)]\}$.
2. Riješiti jednačine: a) $x : (-6) = 78$; b) $x \cdot 12 = -144$;
   c) $-8 \cdot x = 336$; d) $-56 : x = -14$; e) $7x + 15 = -27$;
   f) $-16 = -9m - 52$; g) $3 - 3x = -18$; h) $2|x| - 1 = 17$;
   i) $45 : |x| - 3 = 6$; j) $(5x + 70) \cdot (-2x - 14) = 0$;
   k) $-4x \cdot (-3x - 12) = 0$.

3. Zbir tri uzastopna cijela broja je -21. Koji su to brojevi?
4. Ako broj -48 umanjimo za petostruku vrijednost nepoznatog broja dobijamo broj -8. Koji je to broj?
5. Riješiti nejednačine: a) $7 \cdot x \leq -56$; b) $x \cdot (-6) \geq 162$;
   c) $x : (-13) \geq -5$; d) $3x - 2 < -17$; e) $4a + 3 > -13$; f) $|x + 1| < 2$.
6. Odrediti vrijednosti promjenljive *n* za koje je dati razlomak pozitivan
$$\frac{-7}{20 - 4n}.$$
7. Ako su $\alpha = 56°$ i $\gamma_1 = 116°$ uglovi trougla ABC, izračunati uglove β i γ, a zatim uporediti njegove stranice.
8. Simetrale unutrašnjih uglova α i β trougla ABC obrazuju ugao od $95°$. Izračunati mjeru ugla γ ako je $\alpha = 64°$. Napisati kakav je to trougao prema uglovima.
9. U jednakokrakom trouglu ugao pri vrhu je za $21°$ veći od ugla na osnovici. Koliki su uglovi tog trougla?
10. Osnovica jednakokrakog trougla je za 4 *cm* kraća od kraka. Izračunati dužine kraka i osnovice ako je obim trougla 14 *cm*.
11. Ako je M bilo koja tačka simetrale duži AB, dokazati da je AM = BM.
12. Ako su AM i BN težišne linije jednakokrakog trougla sa osnovicom AB, dokazati da je $\Delta ACM \cong \Delta BCN$.

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. Riješiti jednačine:
   a) $11 - 3x = -(-2)$; b) $-2 = -8 - 3(x - 2)$; c) $|4x + 2| = 14$.
2. Koji cijeli brojevi su rješenja nejednačina:
   a) $3x : 2 \geq 6$; b) $(2x - 1) : (-3) > -1$?
3. Izračunati sve unutrašnje i spoljašnje uglove ΔABC ako je $\alpha_1 = 102°41'$ i $\gamma = 81°42'26''$.
4. Spoljašnji ugao kod vrha jednakokrakog trougla iznosi $128°$. Izračunati ugao između visine na krak i simetrale ugla, koja polazi iz istog tjemena kao i visina.
5. Nad stranicom AB kvadrata ABCD konstruisan je sa spoljašnje strane jednakokraki trougao ABE sa osnovicom AB. Dokazati da je CE = DE.

II grupa

1. Riješiti jednačine:

   a) $-3x + 7 = -2$; b) $-17 + 4 \cdot (-x) = -25$; c) $\frac{5x+10}{x-2} = 0$.

2. Koji cijeli brojevi su rješenja nejednačine:

   a) $2x \cdot 3 \geq 6$; b) $-18 : (5 - 2x) < -2$.

3. Izračunati sve unutrašnje i spoljašnje uglove ΔABC ako je: $\beta_1 = 108°31'$ i $\gamma = 71°32'22''$.
4. U jednakokrakom trouglu ABC, sa osnovicom AB, simetrala ugla BAC i visina AD sijeku se pod uglom od 12°. Izračunati unutrašnje uglove tog trougla.
5. Data je kružnica k(O,r) i na njoj tetiva AB. Ako je OC normalna duž na tetivu AB, dokazati da je tačka C središte duži AB.

Ljiljana Vučić, JU OŠ „Milija Nikčević“, Nikšić

VIII razred

Stepeni. Monomi, binomi, razlika kvadrata.
Funkcija direktne proporcionalnosti. Linearne jednačine.

1. Izračunati vrijednost izraza: a) $\frac{(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3)^4 : (2^2)^3}{(2^2)^5 : (2^2)^3}$; b) $(-2ab)^3 \cdot (\frac{2a}{b})^3$.

2. Uprostiti izraze: a) $\frac{(a \cdot a^2 \cdot a^3)^4 : (a^2)^3}{(a^7)^3 : (a^2)^8}$; b) $\frac{(3a^2b)^3 : (9a^3b)^2}{(\frac{ab}{3})^4}$.

3. Svesti na stepene sa istom osnovom, a zatim izračunati:

   a) $64^3 : (4^2)^3$; b) $\frac{5^2 \cdot 125 \cdot 5^7}{(5^8 \cdot 5) : 625}$.

4. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $(0{,}6)^3 \cdot (3\frac{1}{3})^3$; b) $(\frac{2}{7})^7 \cdot (3\frac{1}{2})^7$; c) $(\frac{6^{12} \cdot 8^{12}.}{15^{12} \cdot 12^{12}}) : (\frac{3}{5})^{12}$.

5. Napisati kao stepen sa osnovom 2, a zatim izračunati: $\frac{(32^4 \cdot 2^5)^3}{(1024 \cdot 2^4)^3}$.

6. Proizvod $75 \cdot 125 \cdot 81$ napisati u obliku 15^n.
7. Uprostiti izraze: a) $4(2x - 3)^2 - 5(3x - 4)(3x + 4) - (2x - 3)(x - 5)$;

   b) $(4x - 3)^2 + (2x + 5)(2x - 5)$.

8. Kvadrat monoma $-4a^3b^2$ uvećati za proizvod monoma $2ab$ i $-4ab^4$, a zatim srediti izraz.

9. Rastaviti na činioce: a) $(a-2)^2-25$; b) $(5a-4b)^2-(3a-2b)^2$.
10. Nacrtati grafik funkcije $f(x) = 4x$.

    a) Sa grafika odrediti vrijednosti $f(-\frac{1}{2})$ i $f(2)$.

    b) Da li tačke $A(-3, 9)$ i $B(-3, -12)$ pripadaju grafiku?
11. Riješiti jednačine: a) $\frac{x+17}{5}-\frac{3x-7}{4}=-2$;

    b) $(4x+3)^2+(x-4)(x+4)=17x^2+41$.
12. Koji broj treba oduzeti od brojioca i imenioca razlomka $\frac{17}{19}$ da bi se dobio razlomak $\frac{6}{7}$?

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. Uprostiti izraz: a) $\frac{(x^4\cdot x^2)^5:(x\cdot x^3)^4}{(x^3\cdot x\cdot x^2)^3}\cdot(x^2)^3$; b) $0{,}6^3\cdot(3\frac{1}{3})^3+(\frac{2}{7})^7\cdot(3\frac{1}{2})^7$.
2. a) Ako je $A=4x^2-2x+1$, $B=-4x+2$, $C=\frac{3}{2}x$, odrediti $A\cdot B-C$.

   b) Srediti izraz: $2(2x-3)^2+(3x-4)(3x+4)$.
3. Riješiti jednačine: a) $\frac{3\,(4x-8)}{4}-\frac{8x-2}{2}=-3$;

   b) $5(x-3)^2+5\,(x+4)(8-x)=75$.
4. a) Zbir polovine i trećine nekog broja je za 9 manji od tog broja. Koji je to broj?

   b) Obim pravougaonika je 48 *cm*. Jedna stranica je 2 puta veća od druge. Odrediti površinu pravougaonika.
5. Odrediti parametar k funkcije $y = kx$, ako grafik sadrži tačku $A(-4{,}3; 12{,}9)$. Nacrtati grafik funkcije za datu vrijednost parametra k.

II grupa

1. Uprostiti izraze:

   a) $\frac{((x^7)^3:x^{13})\cdot x^5}{(x^9\cdot x^{12}):(x^4)^5}$; b) $(\frac{6^{12}\cdot 18^{12}}{15^{12}\cdot 12^{12}}):(\frac{3}{5})^{10}$.
2. a) Ako je $A=x^2+1$, $B=-4x+5$ i $C=-4x^2-5x+1$, odrediti $C-A\cdot B$. Kog stepena je dobijeni polinom?

   b) Srediti izraz: $(3x-1)^2-(4x+5)(4x-5)$.

3. Riješiti jednačine:

   a) $(x + 5)(x + 2) - 3(4x - 5) = (x - 5)^2 + 15$; b) $x + \frac{2x-4}{2} - \frac{3x}{5} = 1$.

4. a) Zbir polovine i petine nekog broja manji je za 999 od tog broja. Koji je to broj?

   b) Štap je $\frac{2}{5}$ svoje dužine u zemlji, $\frac{1}{3}$ njegove dužine je u vodi i 1,2 *m* van vode. Kolika je dužina štapa?

5. Funkcija y = kx data je tabelarno. Popuniti tabelu i nacrtati grafik date funkcije.

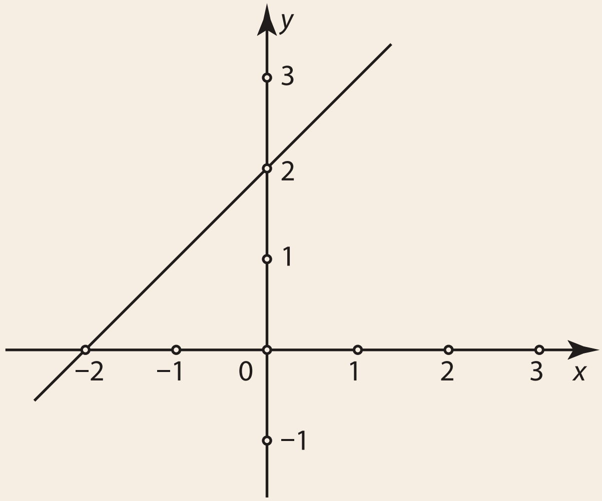
x	3		– 6	– 4	
y = kx		4	1,2		0,4

Ana Jovanović, JU OŠ „Luka Simonović“, Nikšić

IX razred

Linearna funkcija. Površina i zapremina prizme.

1. Date su funkcije u implicitnom obliku: $a)\ 2x - 4y + 4 = 0$; $b)\ 5x - 2y - 3 = 0$.
   Napisati date funkcije u eksplicitnom obliku, a zatim nacrtati njihove grafike.
2. Napisati jednačinu koja odgovara nacrtanom grafiku.



3. Odrediti linearnu funkciju čiji grafik sadrži tačke $A(-1, -4)$ i $B(1, 2)$.
4. Data je funkcija $y = (m+2)x + (m - 4)$, gdje je $m \in \mathbb{R}$.Odrediti vrijednost parametra m tako da je nula funkcije $x = 4$.
5. Ako tačka $A(3, 2)$ pripada grafiku funkcije $mx - 2x = y - m$, izračunati vrijednost parametra $m \in \mathbb{R}$ i za tu vrijednost parametra m napisati funkciju u eksplicitnom obliku.
6. Odrediti linearnu funkciju y = kx + n, čiji grafik sadrži tačku $M(1, 5)$ i paralelan je grafiku funkcije $2x - y - 1 = 0$.
7. Odrediti vrijednost parametra $m \in \mathbb{R}$, tako da funkcija $y = (4-m)x + (2m - 5)$ bude rastuća.
8. Izračunati površinu pravilne: a) trostrane b) četvorostrane prizme, čija je osnovna ivica 4 cm, a visina 6 cm.
9. Izračunati zapreminu i dijagonalu kvadra čije su osnovne ivice 12 cm i 5 cm, ako je njegova površina 392 cm^2.
10. Zbir dužina jednakoivične trostrane prizme je 54 cm. Izračunati površinu i zapreminu prizme.
11. Osnova prave prizme je romb sa dijagonalama 12 cm i 16 cm. Izračunati površinu prizme ako je manji dijagonalni presjek kvadrat.
12. Izračunati površinu i zapreminu pravilne šestostrane prizme visine 3 cm ako je dužina duže dijagonale 4 cm.
13. Prostorna dijagonala pravilne četvorostrane prizme dužine 12 cm nagnuta je prema ravni osnove pod uglom od 45°. Izračunati zapreminu te prizme.

Prijedlog drugog pismenog zadatka

I grupa

1. Data je funkcija $x - 2y + 2 = 0$.

   a) Datu funkciju napisati u eksplicitnom obliku; b) Odrediti presjeke grafika funkcije sa koordinatnim osama; c) Nacrtati grafik funkcije.

2. Odrediti vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$, tako da funkcija
   $y = (m - \frac{1}{2})x + (m + \frac{3}{4})$ bude opadajuća.
3. Odrediti linearnu funkciju $y = kx + n$, čiji grafik sadrži tačku presjeka linearnih funkcija $x - 2y = 4$ i $x + 2y = 2$ i paralelan je grafiku funkcije $y = \frac{1}{2}x + 5$.
4. Izračunati površinu i zapreminu pravilne trostrane prizme ako je osnovna ivica dva puta kraća od visine čija je dužina 8 cm.

5. Izračunati površinu i zapreminu pravilne šestostrane prizme čija je veća dijagonala dužine 16 *cm,* nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 30°.

II grupa

1. Data je funkcija $2x - y + 3 = 0$.
   a) Odrediti nulu date funkcije i tok; b) Odrediti presjeke grafika funkcije sa koordinatnim osama; c) Nacrtati grafik funkcije.
2. Odrediti vrijednost parametra $m \in \mathbb{R}$, tako da funkcija
   $y = (2m - \frac{3}{2})x - 2(m - 1)$ bude rastuća.
3. Odrediti parametar m tako da grafik funkcije $(m - 3)\,x - 2y + 6 = 0$ bude paralelan sa grafikom funkcije $2x - y + 3 = 0$ i odrediti monotonost tako dobijene funkcije.
4. Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane prizme, čiji je dijagonalni presjek kvadrat površine 36 cm^2.
5. Izračunati površinu i zapreminu pravilne šestostrane prizme čija je veća prostorna dijagonala 8 *cm* nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60°.

Smiljana Lazović, JU OŠ „Narodni heroj Savo Ilić”, Kotor

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Dva suplementna ugla razlikuju se za 1°. Koliki su ti uglovi?
2. Ugao ß je za 10° manji od ugla koji je tri puta veći od ugla α. Izračunati uglove α i ß, ako se zna da su oni komplementni.
3. Pomoću ugla od 19°, koji je nacrtan uglomjerom, konstruisati ugao od 1°.
4. Na pitanje nastavnika koliko je odsutnih učenika, redar je odgovorio: „Jedna šestina“. U tom momentu u razred ulazi jedan učenik, pa se redar ispravlja: „Jedna osmina, nastavniče“. Koliko ukupno učenika ima u ovom odjeljenju?

VII razred

1. Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla četiri puta je veći od ugla na osnovici. Osnovica je dužine 6 *cm*. Izračunati te uglove i konstruisati taj trougao.
2. Odrediti zbir svih cijelih brojeva x za koje je $|x| \leq 3$ i $-x \geq 3$.

3. Ako broj 3 umanjimo za neki cijeli broj, pa apsolutnu vrijednost dobijene razlike oduzmemo od 1, dobićemo broj koji nije manji od razlike brojeva – 6 i – 2. Za koliko smo umanjili broj 3?
4. Jedan ugao pravouglog trougla je 17°30'. Pod kojim uglom se vide katete iz centra kruga opisanog oko ovog trougla?

VIII razred

1. Sa koliko cifara se zapisuje broj $4^{16} \cdot 5^{25}$?
2. Riješiti jednačinu: $\frac{2002^{2002}+2002^{2003}}{2003^{2003}} = x^{2002}$.
3. Izračunati vrijednost razlomka $\frac{a+b}{a-b}$, ako je $a > b > 0$ i $a^2 + b^2 = 6ab$.
4. Šta je veće: $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ ili $3\sqrt{5} + 7$?

IX razred

1. Izračunati površinu slike ograničene graficima funkcija $x + y = 3$ i $y - x = 1$ i apcisnom osom.
2. Odrediti realan broj a tako da prava $(a - 2)x + y - 2a + 3 = 0$ gradi dva puta veći odsječak na pozitivnom dijelu ose Ox nego na pozitivnom dijelu ose Oy.
3. Dijagonalni presjek pravilne četvorostrane prizme ima obim 42 *cm* i dijagonalu 15 *cm*. Odrediti dužine ivica prizme.
4. Odnos površina strana datog kvadra je 2 : 3 : 5. Izračunati odnos dužina ivica tog kvadra.

TAKMIČARSKI ZADACI

VI razred

1. Uglovi α i ß su komplementni. Odrediti uglove α i ß ako je njihova razlika jednaka trećini većeg ugla.
2. Koliki ugao zaklapaju satna i minutna kazaljka na časovniku u 8 časova i 10 minuta?

VII razred

1. Odrediti zbir rješenja jednačine:
$(-10) + (-9) + (-8) + \cdots + (x - 1) + x = -27$.

2. Jedan oštar ugao datog pravouglog trougla je pet puta veći od drugog oštrog ugla. Dokazati da je hipotenuza ovog trougla četiri puta veća od hipotenuzine visine.

VIII razred

1. Dokazati da je zbir $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2000} + 3^{2001}$ djeljiv sa 39.
2. Dokazati da je broj $\underbrace{111\ldots111}_{2000} - \underbrace{222\ldots222}_{1000}$ kvadrat nekog prirodnog broja.

IX razred

1. Nacrtati u koordinatnom sistemu ΔABC čije stranice: AB, BC i AC redom pripadaju pravima: $y = 1, x = 3, x - y + 4 = 0$. Izračunati obim kruga opisanog oko trougla ABC.
2. Date su dvije jednake prave prizme, čije osnove su jednakokraki pravougli trouglovi sa katetama od 5 *cm*. Visine prizmi su po 10 *cm*. Koliko različitih trostranih i četvorostranih prizmi možemo da sastavimo od te dvije jednake prizme? Koja od njih ima najveću površinu?

Stanislavka Aprcović i Irena Pavićević,
JU OŠ „Štampar Makarije“, Podgorica

RJEŠENJA TAKMIČARSKIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

1. Petar i Ana su mjerili svojim koracima dužinu dijagonale pravougaonog dvorišta. Pošli su iz iste tačke i kretali se po istoj pravoj liniji. Dužina te dijagonale je 143 *m*. Njihove stope su se poklopile 20 puta (ne računajući polazni položaj). Anin korak je dužine 55 *cm*. Kolika je dužina Petrovog koraka?
2. Odrediti najmanji prirodan broj djeljiv sa 36, zapisan samo ciframa 4 i 7.

Rješenja:

1. Dvadeseti dio dužine dijagonale dvorišta je rastojanje između dva poklapanja stopa, a to je $14300\ cm : 20 = 715\ cm$.

   Broj 715 je NZS za 55 (Anin korak) i dužinu Petrovog koraka.

   Kako je $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13 = NZS(55, n)$ i $55 = 5 \cdot 11$, to su moguće vrijednosti za n: $13\ cm$, $5 \cdot 13 = 65\ cm$, ili $11 \cdot 13 = 143\ cm$. Jedino realno rješenje je da je $n = 65\ cm$, tj. dužina Petrovog koraka je 65 *cm*.

2. Broj je djeljiv sa 36 ako je djeljiv sa 9 (zbir cifara djeljiv sa 9) i sa 4 (dvocifreni završetak djeljiv sa 4). Od brojeva čiji je dvocifreni završetak: 44, 47, 74, 77 samo je 44 djeljiv sa 4, a zbir njegovih cifara je 8. Zbir preostalih cifara traženog broja mora biti 1, ili 10, ili 19 itd. Sabiranjem brojeva 4 i 7 ne može se dobiti 1 i 10, a kako je $19 = 4 + 4 + 4 + 7$, to je 444744 traženi broj.

VII razred

1. Porodica Dijagonalović ima samo jedan fenjer i treba da po noći, trošnim mostom, pređe preko nabujale rijeke. Otac pređe most za jedan, majka za 2, sin za 5, a baka za 10 minuta. Koliko je najmanje vremena potrebno da svi pređu preko mosta, ako se na mostu istovremeno mogu naći najviše 2 osobe, a brža osoba mora da prati ritam sporije? Osoba koja prelazi most mora da nosi fenjer, ali preko mosta jedna osoba ne može da nosi drugu osobu.
2. Naći zbir cjelobrojnih rješenja nejednačine $|x + 5| \leq 7$.

Rješenja:

1. Prvo preko rijeke pređu otac i majka za 2 minuta, pa se otac sa fenjerom vrati za 1 minut. Zatim sin i baka pređu most za 10 minuta, pa majka vrati fenjer za 2 minuta do muža. Na kraju njih dvoje, majka i otac, pređu most za 2 minuta. Svi su prešli za $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ minuta.
2. $|x + 5| \leq 7$

   $-7 \leq x + 5 \leq 7$

   $-12 \leq x \leq 2.$

Dakle, treba naći zbir brojeva: $-12, -11, -10, \ldots, 0, 1, 2$. Njihov zbir je – 75.

VIII razred

1. Odrediti tri prosta broja tako da im je proizvod 7 puta veći od zbira.
2. Poslodavac je nagradio radnika povećanjem zarade za 10%. Pošto je vratio dug od 60 €, preostalu zaradu radnik je podijelio na 3 jednaka dijela od po 90 €. Kolika je zarada radnika bez nagrade?

Rješenje:

1. Neka su *x, y, z* prosti brojevi.

   Kako je $7 \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$, slijedi da 7 dijeli $x \cdot y \cdot z$. Kako su *x, y, z* prosti brojevi slijedi da je bar jedan od njih djeljiv sa 7, tj. pošto su u pitanju prosti brojevi mora biti jedan od njih jednak broju 7.

Neka je $x = 7$. Slijedi $7 \cdot (7 + y + z) = 7 \cdot y \cdot z$, tj. $7 + y + z = y \cdot z$.

$y + z - y \cdot z = -7$

$y \cdot (1 - z) + z = -7$

$y \cdot (1 - z) + z - 1 = -8$

$(1 - z) \cdot (y - 1) = -8$

$(z - 1) \cdot (y - 1) = 8$

Zaključujemo da po uslovu zadatka jedino odgovara da je $8 = 4 \cdot 2$.

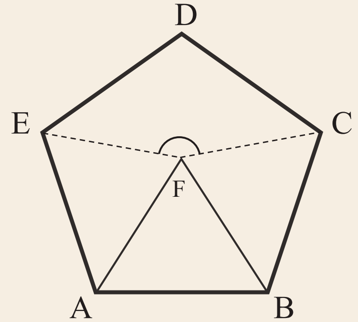
Prema tome, $(z - 1) = 4$ i $(y - 1) = 2$, ili obrnuto. Dakle, rješenja su prosti brojevi 3, 5, 7.

2. Zarada radnika je x €. Radnik je dobio $x + \frac{1}{10}x = \frac{11}{10}x$ €.

   Pošto je vratio dug od 60 €, ostalo mu je $\frac{11}{10}x - 60$ €. Formiramo jednačinu $\left(\frac{11}{10}x - 60\right) : 3 = 90$, čije je rješenje 300. Zarada radnika je 300 €.

IX razred

1. Tačka A je od ravni α udaljena 8 *cm*, a tačka B je od ravni α udaljena 3 *cm*. Koliko je rastojanje između tačaka A i B, ako je dužina normalne projekcije duži AB na ravan α, duž A_1B_1, jednaka 12 *cm*? Odrediti sva rješenja.
2. U pravilni petougao ABCDE ucrtan je jednakostranični trougao ABF, kao na slici. Izračunati ugao ∢EFC, naznačen na slici.



Rješenje:

1. Razmatramo dva moguća slučaja.

   I rješenje (tačke A i B su sa raznih strana ravni α). Računamo:

   $AB^2 = (8 + 3)^2 + 12^2 = 11^2 + 12^2 = 265$. $AB = \sqrt{265}\ cm$.

   II rješenje (tačke A i B su sa iste strane ravni α).

   Onda je: $AB^2 = (8 - 3)^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 169$. $AB = 13\ cm$.
2. Unutrašnji uglovi pravilnog petougla su 108°, a jednakostraničnog trougla ABF su 60°, pa je $\sphericalangle EAF = \sphericalangle CBF = 108° - 60° = 48°$. Trouglovi EFA i CFB su jednakokraki, pa je $\sphericalangle EFA = \sphericalangle CFB = \frac{180° - 48°}{2} = 66°$ i $\sphericalangle EFC = 360° - 2 \cdot 66° - 60° = 168°$.

Anđa Vujović, Snežana Boljević, Tamara Jakovljević,

JU OŠ „Pavle Rovinski“, Podgorica

PISANA PRIPREMA ZA ČAS

Škola:	JU OŠ „Lovćenski partizanski odred", Cetinje
Predmet:	Matematika
Razred:	Deveti
Nastavnik:	Katarina Kapičić
Nastavna jedinica:	Površina pravilne prizme
Tip časa:	Obrada

TOK ČASA

Aktivnost učenika	Aktivnost nastavnika
Uvodni dio časa	
Učenici zapisuju naslov lekcije u svojim sveskama. **Učenici daju odgovore na postavljene zahtjeve i pitanja za ponavljanje i povezivanje gradiva, slušaju uputstva i, eventualno, postavljaju dodatna pitanja.**	Nastavnik kazuje i zapisuje na tabli naslov lekcije, zatim ističe cilj časa usmeno, frontalno svima. Nastavnik postavlja zahtjeve i pitanja: 1. Definiši pravu prizmu. Odgovor: **Prizma čije su bočne ivice normalne na ravni koje sadrže njene osnove zove se prava prizma.** 2. Definiši pravilnu prizmu. Odgovor: **Pravu prizmu koja za osnove ima dva pravilna mnogougla nazivamo pravilnom prizmom.** 3. Po čemu su prava i pravilna prizma slične? Odgovor: **Pravilna prizma je i prava prizma.** 4. Daj primjer pravilne prizme. Odgovor: **Kocka-pravilna četvorostrana prizma, pravilna trostrana prizma, pravilna n-tostrana prizma...** 5. Izračunaj površinu prave petostrane prizme čija je baza površine 10, a bočna strana 20. Odgovor: **Kako je opšta formula za površinu prizme $P = 2 \cdot B + M$, a $M = 5 \cdot Pb$ (Pb-površina bočne strane), to je: $P = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 20 = 20 + 100 = 120$.** 6. Prodiskutuj opštu formulu za računanje površine prave prizme. Odgovor: **Opšta formula za računanje površine prizme ukazuje na to da ako znamo površine osnove prizme i jedne njegove bočne strane ili znamo da ih izračunamo, tada znamo da odredimo i površinu prizme.**

	7. Koje opšte zaključke možete da izvedete? Odgovor: **Kako je pravilna prizma prava prizma, da bi odredili njenu površinu možemo da primijenimo opštu formulu za računanje P (prave) prizme.** Nastavnik obavještava učenike o predstojećim aktivnostima na času koje će se odvijati u okviru dvije cjeline. Prvi dio - u okviru njihovog grupnog rada (metoda slagalice) i drugi - kao njihov individualni rad (pisana provjera znanja, metoda demonstracije). Nastavnik upućuje učenike u način rada u metodi slagalice.
Glavni dio časa	
Učenici se razmještaju po unaprijed dogovorenom rasporedu. **Svaka grupa učenika dobija na svom radnom prostoru materijal za dalji rad.** **Učenici uzimaju nastavne listiće (br.1), pažljivo čitaju, dogovaraju se, određuju ,,eksperte" u okviru svoje grupe, skiciraju osnove odgovarajuće prizme i lijepe stikere za identifikaciju.** **Učenici eksperti odlaze na mjesta okupljanja ,,eksperata" noseći svoj model.** **Učenici uočavaju izazov rješavanja zadatka, prikupljaju potrebne podatke o mjerama modela (mjere modele lenjirom ili šestarom), uočavaju načine na koje mogu da riješe zadatak.**	Nastavnik kaže učenicima da se razmjeste onako kako je dogovoreno. (U odjeljenju se formiraju 4 grupe po 6 učenika.) Nastavnik će da podijeli po grupama: – prazne listove A4 kao pomoćni prostor za račun, skicu; – nastavne listiće br.1 i br.2; – stikere za obilježavanje članova grupe; – flomastere; – modele trostrane, četvorostrane i šestostrane prizme; – hamer, tako što će da postavi predviđeni materijal na odgovarajuće mjesto, na klupi grupe, koje je predviđeno za to, a nastavni listić se postavlja tako da njegov sadržaj nije vidljiv. Jedna grupa dobija tačno onoliko listića koliki je broj članova grupe. Nastavnik dodjeljuje svakoj grupi po jedan crni flomaster i po jedan flomaster u boji (crveni, plavi, žuti i zeleni) i naglašava učenicima da crnim flomasterom treba da rade zadatak na hameru, kad za to dođe vrijeme (u nastavnom listiću je precizirano kad to treba da se radi). Kad su svi učenici uzeli nastavni listić br. 1 nastavnik obavještava učenike da sada mogu da okrenu listiće i upoznaju se sa sadržajem, upozoravajući ih da je za tu aktivnost planirano 4 minuta, a da je vrijeme predviđeno za njihovu sledeću aktivnost, tj. konsultaciju ,,eksperata", 7 minuta. Nastavnik uvažava i usklađuje tempo rada cjelokupnog odjeljenja. Nastavnik pazi na vrijeme, pa obavještava ,,eksperte" da je vrijeme za njihove konsultacije isteklo i da treba da se vrate u matične grupe, a da sledeća aktivnost traje 11 minuta (okvirno).

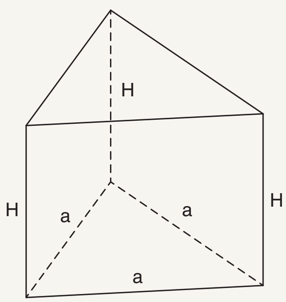
Učenici pri tom razmjenjuju i stiču nova znanja, diskutuju, dogovaraju se, zapisuju ideje. Učenici poštuju zadato vrijeme i prate korake navedene u nastavnom listiću br. 1.

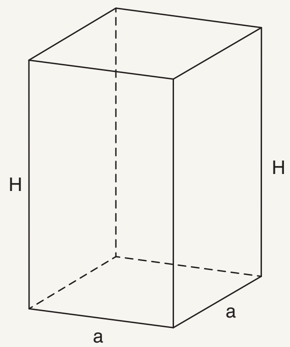
Nastavnik se trudi da utiče na stvaranje i održavanje radne atmosfere i vodi računa o vremenu, po potrebi pristupa učenicima individualizovano, pomaže onima koji otežano prate nastavu, da nacrtaju traženu mrežu pravilne prizme, trudeći se da se što manje upliće u rješavanje postavljenog zadatka.

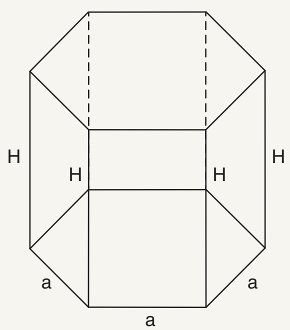
Nastavnik komentariše rješenja i pohvaljuje učenike, zapisuje na tabli formule za izračunavanje površine pravilne trostrane, četvorostrane i šestostrane prizme.

Učenici „ekspreti“ se vraćaju u matičnu grupu i upoznaju ostale članove te grupe sa svojim saznanjima proisteklim iz rada u stručnim grupama. Učenici računaju površine dobijenih modela pravilnih prizmi, uobličavaju opšte formule za površine pravilne trostrane, pravilne četvorostrane i pravilne šestostrane prizme i sve zapisuju na dobijeni hamer papir.

Po završetku rada na drugom zadatku, nastavnik komentariše, ocjenjuje i pohvaljuje učenike.







Učenici postavljaju hamere na tablu.

Učenici provjeravaju korektnost formula koje su izveli, upoređujući ih sa formulama datim u njihovim udžbenicima iz matematike.

Učenici uzimaju nastavni listić br. 2 i svaki učenik samostalno radi jedan od zadataka zapisanih na tom listiću. Ostali zadaci na listiću su za domaći. Učenici koji iz bilo kojih razloga otežano prate nastavu matematike ili su to radili tokom proteklog časa, rade zadatak koji je na nastavnom listiću br. 2 prvonavedeni.

<table>
<tr><th colspan="2">Završni dio časa</th></tr>
<tr><td>Učenici odgovaraju na postavljena pitanja navodeći, opisujući i demonstrirajući traženo.
Na samom kraju časa učenici ocjenjuju određene aspekte časa.</td><td>Nastavnik postavlja pitanja:
1. Navedi formulu za računanje površine pravilne trostrane prizme.
Odgovor:
$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H$$
Navedi formulu za računanje površine pravilne četvorostrane prizme.
Odgovor:
$$P = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot H$$
Navedi formulu za računanje pravilne šestostrane prizme.
Odgovor:
$$P = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot H$$
2. Opiši svojim riječima kako se do nje dolazi (npr. za pravilnu trostranu prizmu). Odgovor:
Polazim od opšte formule za računanje P prizme; uočavam da je osnova pravilne trostrane prizme jednakostranični trougao, a da se omotač pravilne trostrane prizme sastoji od tri podudarna pravougaonika. Na osnovu toga mogu da je izvedem.
3. Demonstriraj pomoću svog modela što čini površinu pravilne prizme.
Odgovor:
Učenik na svom modelu pokazuje baze i bočne strane prizme, imenujući koji su to mnogouglovi – jednakostranični trouglovi, kvadrati, pravilni šestouglovi i pravougaonici.
Na samom kraju časa, nastavnik kaže učenicima da će primijeniti tehniku ocjenjivanja časa ,,meta“, objašnjava je, postavlja karton sa ,,metom procjene časa“ na sredini table, te učenici daju svoju ocjenu časa.</td></tr>
</table>

NASTAVNI LISTIĆ BR. 1

1. **ZADATAK** (Trajanje 4 minuta.)
   - **a) Izračunati površinu svakog od datih modela tijela;**
   - **b) Zapisati opštu formulu za računanje površine one vrste prizme kojoj dati modeli pripadaju.**

Da biste to uradili podijelićete ,,posao“ na tri dijela, tj. po dva učenika grupe baviće se jednim od datih tijela. Ta dva člana grupe proglasićete ,,ekspertima“ za njima dodijeljeno tijelo. Da bi izbor bio vidljiv, na stikerima, koji su vam dati, ćete skicirati (nacrtati rukom), mnogougao koji je osnova datog modela i zalijepićete ga na lijevu stranu grudi svakog člana grupe, što znači da vaša grupa treba da označi i zalijepi tri puta po dva stikera sa istom skicom.

2. (Trajanje 7 minuta.) Prelazite na mjesto označeno za „eksperte iste struke“. Konsultujete se s članovima „stručne“ grupe oko rješavanja zadatka, dogovarate se, donosite zaključke koristeći pristup koji predlaže **metoda slučaja:**
   – razumijevanje zadatka;
   – mjerenje potrebnih dimenzija sa samog modela date pravilne prizme;
   – utvrđivanje na koje se načine može riješiti dati zadatak (zapisivanje matematički korektnih formula)...

Poslije ovog koraka vraćate se u početnu grupu i rješavate zadatak na hamer papiru ispisujući ga crnim flomasterom (u trajanju 11 minuta), tokom čega primjenjujete:

– računanje površine modela pravilne prizme na odabrani način (primjenjivanje odabrane formule)...

(Po zapisivanju zadatka kačite hamer na tablu. Saslušate komentare nastavnika i drugih grupa, zatim primjenjujete naredni korak metode slučaja.)

– upoređivanje primijenjenog (formule) sa opšteprihvaćenim (formulom datom u udžbeniku)...

Posljednji korak ove metode:

– povezanost teorijskog i računskog sa praktičnim i upotrebnim, primijenićete samostalnim radom zadatka na nastavnom listiću br. 2. Srećno!

NASTAVNI LISTIĆ BR. 2

Treba da izabereš jedan od ponuđenih zadataka i uradiš. Preostali su za domaći. (Trajanje 11 minuta.)

ZADATAK 1.

Nacrtaj mrežu pravilne trostrane prizme čija je ivica osnove 5 *cm*, a visina 10 *cm*, izreži mrežu od kartona koji ti je dat, zatim oblikuj model prizme. Izračunaj površinu prizme.

ZADATAK 2.

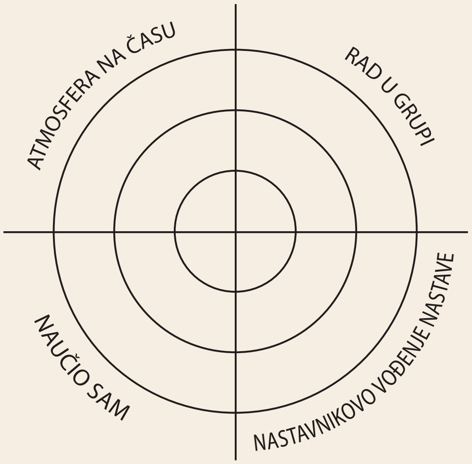
Nacrtaj mrežu pravilne četvorostrane prizme čija je ivica osnove 5 *cm*, a visina 10 *cm*, izreži mrežu od kartona koji ti je dat, zatim oblikuj model prizme. Izračunaj P kartona koji si odbacio.

ZADATAK 3.

Nacrtaj mrežu pravilne šestostrane prizme čija je ivica osnove 3 *cm*, a visina 10 *cm*, izreži mrežu od kartona koji ti je dat, zatim oblikuj model prizme. Izračunaj koji je procenat dobijenog kartona koji si odbacio.

TABELA PROCJENE POSTIGNUĆA UČENIKA.
Nastavnik popunjava tabelu za svakog učenika, pomoću svoje skale za procjenu postignuća.

„META“ PROCJENE ČASA



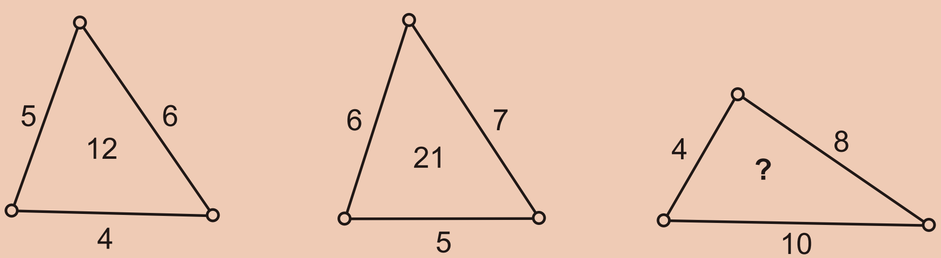
Kombinujući metodu mete i tabele postignuća svih učenika doći ću do mjere samoevaluacije.

Ako svakoj tačkici na meti dodijelimo ocjenu 1, 2, 3, u zavisnosti kojem prstenu pripada (unutrašnjem krugu-3, manjem prstenu-2 i većem-1), pa izračunamo srednju ocjenu „mete“ i izračunamo srednju ocjenu na nivou odjeljenja, za ocjenu časa bih koristila formulu:

Ocjena časa= (srednja ocjena odjeljenja + srednja ocjena mete + 2) : 2.

NAGRADNI ZADATAK

Znak pitanja zamijeniti određenim brojem, tako da se dobije logičan niz.



ŽENE U MATEMATICI

(II dio)

Da svijet nauke, a samim tim i matematike, nije nastao zahvaljujući samo muškarcima dokazuju mnoge žene koje su dale veliki doprinos mnogim otkrićima. Naša želja je da vam predstavimo neke od njih.

Teano, Hipatija, Emilie du Chatelet, Maria Agnesi, Marie Sophie Germain, Augusta Ada Byron King, Florence Nightingale, Mary Everest Boole i Sofia Vasilyevna Kovalevskaya su žene, naučnice i matematičarke o kojima smo pisali u prethodnom broju. U ovom nastavljamo priču o njima, ženama koje su imale značajna dostignuća u raznim oblastima matematike.

Charlotte Angas Scott (1858 -1931)

U razdoblju u kojem je obrazovanje, i to samo ono osnovno, bilo dozvoljeno samo ženama iz visokih slojeva, **Charlotte Angas Scott** postala je jedna od prvih engleskih žena koje su stekle doktorat iz matematike. Kraj 19. i početak 20. vijeka razdoblje je u kojem je društvo smatralo da je ženino mjesto u kući. Ipak, Charlotte Scott zastupala je jednakost polova, a njeno nastojanje postalo joj je životni izazov. Velike su njene zasluge za promjenu ženine uloge na području matematike. Njen najraniji interes za matematiku javio se već u sedmoj godini jer joj je otac mogao priuštiti učitelje matematike, obzirom da je bio predsjednik Lancashire Collegea. U to vrijeme ženama je bilo dostupno vrlo malo višeg obrazovanja i nijesu se mogle upisati ni na jedan koledž u Engleskoj. Godine 1880. pristupila je završnom ispitu na Cambridgeu, na kojem su najbolji trebali biti nagrađeni. Nagrade su se dodjeljivale isključivo muškim studentima. Po rezultatima Charlotte je bila među osam najboljih studenata na univerzitetu, ali joj ipak nije dopušteno da prisustvuje dodjeli nagrada jer je bila žena. Diplomirala je 1882. godine, a 1885. doktorirala.

Ovo veliko postignuće u području kojim su dominirali muškarci nije prošlo neprimijećeno: rezultat je bio taj da je ženama omogućen upis na Cambridge i objavljivanje njihovih imena zajedno s imenima muških studenata. Charlotte je uvela dodiplomski i poslijediplomski program matematike na Bryn Mawru. Objavila je brojne matematičke članke iz aritmetike, algebre i geometrije. Bila je član nekoliko matematičkih društava i organizacija, prva Britanka koja je primila doktorat iz matematike i prva matematičarka na Bryn Mawr Collegeu.

Emmy Amalie Noether (1882-1935)

Njemačko-jevrejsku matematičarku **Emi Amaliju Neter** mnogi matematičari, uključujući Alberta Ajnštajna, smatraju najznačajnijom ženom u istoriji matematike. U djetinjstvu nije bila zainteresovana za matematiku, vrijeme je provodila u školi učeći jezike. Kada je diplomirala, položila je test koji joj je omogućio da predaje engleski i francuski u ženskim školama. Kada je imala 18 godina, odlučila je da studira matematiku na Univerzitetu u Erlangenu. Njen brat Fric je tamo već studirao matematiku, a njen otac je bio profesor matematike. Ali fakultet joj nije dozvolio da se upiše samo zato što je žena. Ipak, dvije godine je dolazila na predavanja, a onda je polagala ispit koji je trebalo da joj omogući da postane redovan student matematike. Položila je ispit i nakon pet godina studiranja doktorirala matematiku. Njeni najvažniji radovi su vezani za apstraktnu algebru i topologiju i jedna je od centralnih figura moderne algebre. Isticala se i na polju fizike. Njeno ime nosi 15 pojmova i teorema iz matematike, od kojih je učenicima najpoznatiji Noeterov prsten. Uz mnogo otpora, jer je žena, postala je profesor na Univerzitetu u Getingenu, da bi bila izbačena kada je Hitler došao na vlast, i otišla u SAD, gde je provela poslednje dvije godine života.

Mileva Marić Ajnštajn (1875 - 1948)

Mileva Marić rođena je u Titelu 19. decembra 1875. godine u imućnoj porodici u tadašnjoj Habzburškoj monarhiji. Školovala se u Rumi, Novom Sadu, Sremskoj Mitrovici, Šapcu i Zagrebu - gdje god su primali žene. Njen otac je pisao Ministarstvu u Zagrebu i Ministarstvu u Beču tražeći da se napravi izuzetak, podržan od njenih profesora, da se ona primi na muško odjeljenje. Ona je imala briljantne ocjene iz svih predmeta, naročito matematike i fizike, i oni su pristali. Mileva sa 19 godina odlazi u Cirih, jedan od rijetkih evropskih gradova gdje su žene mogle da studiraju. Najprije upisuje studije medicine, a zatim 1896. prelazi na Državnu politehničku školu, na studije fizike i matematike. Tada upoznaje sedamnaestogodišnjeg Alberta Ajnštajna koji joj je bio kolega, kasnije i suprug. Nakon prve dvije godine uspješnih studija, Mileva se ispisuje i odlazi u Hajdelberg gdje je kod nobelovca Filipa Lenarda slušala predavanja iz teorijske fizike gdje proučava fotoelektrični efekat za koji će Albert kasnije dobiti Nobelovu nagradu. Na istim predavanjima upoznala se sa četvorodimenzionalnom geometrijom koja predstavlja matematičku bazu teorije relativiteta koja će proslaviti Alberta. Postoje i navodi da su pisma koja su Mileva i Albert razmjenjivali, a sadržala su matematičke proračune, cenzurisana kako bi se umanjio Milevin značaj. Postoje i oni koji smatraju da nema dovoljno dokaza da je Mileva pomagala Albertu, tako da ovo pitanje nije u potpunosti razjašnjeno ni danas.

Mary Cartwright (1900-1998)

Britanska matematičarka **Meri Lusi Kartrajt** je prva matematičarka koja je postala članica Britanskog kraljevskog društva za unapređenje nauke i prva (i do sada jedina) žena koja je osvojila Silvesterovu medalju „za doprinos analizi i teoriji složene promjenljive funkcije“. Autorka je više od 100 radova, koji tematiziraju funkcije na jediničnom disku, topologiju, diferencijalne jednačine…, uključujući i Kartrajtovu teoremu. Ona je takođe bila prva (i do sada) jedina žena koja je bila predsjednica Londonskog matematičkog društva.

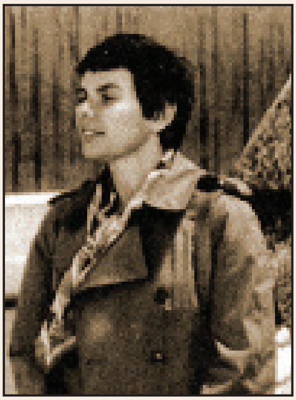
Julia Hall Bowman Robinson (1919 - 1985)

Džulija Robinson je bila američka matematičarka poznata po svojim doprinosima u oblastima teorije računarstva, problema odlučivanja, teorije igara i statistike. Njen rad na Hilbertovom desetom problemu odigrao je ključnu ulogu u njegovom konačnom rješenju. Godine 1982. postala je prva predsjednica Američkog matematičkog društva i primljena je u Američku akademiju nauka i umjetnosti. Ona je rekla: „Sva ova članstva su veoma časna, ali i sramotna. Ja sam zapravo matematičar i ne želim da me pamte kao prvu ženu u ovom ili onom. Željela bih da me kao matematičara pamte jednostavno po teoremama koje sam dokazala i problemima koje sam riješila."

Meri Lusi Kartrajt (1900–1998)

Mary Cartwright bila je jedna od rijetkih žena dvadesetog vijeka koja je napravila značajan proboj u pretežno muškom svijetu matematike. Diplomirala je na univerzitetu u Oxfordu 1923. samo dvije godine nakon što je to bilo dozvoljeno ženama. Nakon što je četiri godine predavala matematiku u školama, vratila se na Oxford 1928. godine da bi stekla titulu doktora matematike. Mentori su joj bili čuveni matematičari G. H. Hardy i E. C. Titchmarsh. Svoj rad na teoriji funkcija nastavila je na Cambridge-u, gdje je 1935. godine imenovana predavačem matematike. Radila je kao univerzitetski profesor od 1935. do 1968. godine. Radila je i sa Džonom Litlvudom na rješavanju Van der Polove jednačine, koja opisuje izlaz nelinearnog radio pojačala kada je ulaz čist sinusni talas. Cio razvoj radija u Drugom svjetskom ratu zavisio je od visokonaponskih pojačala i bilo je pitanje života i smrti imati pojačalo koje je radilo sve što je potrebno. Vojnici su se mučili sa pojačalima koja su se kvarila i za to krivili proizvođače. Cartwright i Littlevood su otkrili da za to nijesu krivi proizvođači, već jednačina. Otkrili su da kako se snaga povećavala, rješenja jednačina postajala su sve nepravilnija. Pri maloj snazi, rješenje ima isti period kao i ulaz, ali kako se snaga povećava, period rješenja se udvostručuje i konačno se dobija neperiodično rješenje. Kartrajt je imala odličnu karijeru u teoriji analitičkih funkcija i u univerzitetskom izdavaštvu, objavljujući brojne članke o klasičnoj analizi i diferencijalnim jednačinama. Godine 1951. izabrana je za predsjednicu Londonskog matematičkog društva, 1964. primila je Sylvesterovu medalju Kraljevskog društva, 1968. De Morganovu medalju Londonskog matematičkog društva, a 1969. dobila je titulu lady (što je ženski ekvivalent tituli sir). Bila je poštovana i voljena zbog direktnih i jasnih rješenja ljudskih i matematičkih problema.

Louise Szmir Hay (1935 -1989)



Luiz Hej je bila američka matematičarka francuskog porijekla. Tek u desetom razredu njeno interesovanje za matematiku postalo je očigledno zahvaljujući profesoru Dejvidu Rozenbaumu za koga je rekla: „... više je volio logičko predavanje nego predavanje tipa dokaz-teorema (koji je propisao Euklid). Napisao je bilješke o logičkom razmišljanju i očekivao je da studenti razumiju što rade kada pišu dokaz... Uvidjela sam da je logički dio matematike mnogo zanimljiviji od numeričkog i kada sam pokazala zanimanje za to, gospodin Rosenbaum mi je preporučio da proučim neeuklidsku geometriju, da problem sagledam iz druge perspektive ...“. Njen rad se fokusirao na rekurzivno nabrojive skupove i teoriju složenosti računara, koja je bila uticajna i na sovjetske i na američke matematičare 1970-ih. Kada je imenovana za šefa odjeljenja za matematiku na Univerzitetu Ilinois u Čikagu, bila je jedina žena koja je vodila odjeljenje matematike na velikom istraživačkom univerzitetu u njenoj eri.

Dragi naši učenici, ovo su bile neke od poznatih matematičarki koje su dale veliki doprinos izučavanju matematike i borbe za ženska prava. Pitamo se da li ih je bilo još, a da njihova imena nijesu zabilježena ili su njihova dostignuća pripisana muškim kolegama. Ostavljamo vama da dalje istražujete rad žena na raznim poljima nauke.

Aleksandra-Ana Popović Vuković,
JU „Srednja mješovita škola”, Golubovci
Danijela-Nela Popović, JU „OŠ Vladika Danilo”, Srpska, Golubovci

AKTIVNOSTI UNMCG

Sastanak u Zavodu za školstvo Crne Gore

Na sastanku predstavnika Zavoda za Školstvo i Udruženja nastavnika matematike (UNMCG) održanom 15. septembra 2022. godine bilo je riječi o velikom problemu nedostatka nastavnika matematike.

Direktorka Zavoda Zoja Bojanić Lalović je istakla da treba izraditi ozbiljnu strategiju i dodala da je problem kadra naročito izražen na sjeveru Crne Gore. Po njoj, stanje u društvu se najbolje reflektuje na obrazovanje. Podsjetila je takođe da je 61 nastavnik pred penzijom, a 34% nastave matematike je nestručno zastupljeno.

Po riječima Nataše Vlahović, nadzornice za matematiku, na birou rada nema matematičara, te kao privremeno rješenje predlaže da se matematičari sa bečelor diplomom zapošljavaju makar u osnovnim školama. Nadzornik za matematiku Miško Vučeljić takođe se osvrnuo na akutni problem nedostatka matematičara, koji je eskalirao. Sastanku su prisustvovali i nadzornici za fiziku i hemiju koji su istakli da imaju iste probleme.

Ispred UNMCG sastanku su prisustvovali predsjednik Radomir Božović i članovi Upravnog odbora: Anđa Vujović, Milan Rosandić i Danijela Jovanović. Bilo je riječi o dosadašnjim aktivnostima udruženja, ali i o problemima finansiranja, slabe saradnje sa zvaničnim institucijama za obrazovanje, materijalnom statusu nastavnika matematike...

Dogovoreno je da UNMCG inicira radni sastanak sa Ministarstvom prosvjete, Zavodom za školstvo, Ispitnim centrom, PMF-om i koordinatorom za lokalne zajednice (kako bi se i one uključile u rješavanje problema kroz stipendije, stanove). Predloženo je da se problem deficita matematičara nađe i u medijima, kako bi se široka javnost upoznala sa tim.

UNMCG u Nikšiću

U Nikšiću je 26. septembra 2022. godine održan sastanak nastavnika matematike iz osnovnih škola u toj opštini i predstavnika Udruženja nastavnika matematike Crne Gore, predsjednika Radomira Božovića i članice Upravnog odbora, Danijele Jovanović. Nastavnici iz škola „Milija Nikčević”, „Dušan Bojović”, „Olga Golović”, „Ivan Vušović”, „Ratko Žarić”, „Luka Simonović”, „Mileva Lajović Lalatović” i „Radoje Čizmović” su sa predstavnicima UNMCG razmijenili mišljenja o nastavi matematike u osnovnim školama.

Uvodnu riječ je imao Nikola Radojičić, član Upravnog odbora UNMCG i organizator ovog sastanka, koji je preporučio kolegama koji nijesu članovi UNMCG, učlanjenje u udruženje. Predstavnici UNMCG su govorili o radu udruženja i projektima koji su realizovani. Razmijenjena su i mišljenja o statusu nastavnika matematike i načinima kako da se stanje popravi.

UNMCG u Kotoru

Član Upravnog odbora UNMCG Milan Rosandić je 7. oktobra 2022. godine organizovao sastanak sa matematičarima u Kotoru. U prostorijama škole „Narodni heroj Savo Ilić", matematičare je ugostila direktorica škole Smiljana Lazović. Razgovorano je o načinima kupovine i pretplate na „Dijagonalu", a prisutni su istakli zainteresovanost za učešće u projektima, naročito djece, jer imaju učenike koji su zainteresovani da uče više.

Profesori Gimnazije iz Kotora, koji su od osnivanja članovi UNMCG smatraju da u „Dijagonalu" treba ubaciti možda i još neke zanimljivosti i zanimljive poglede na matematiku, a možda proširiti list i na gimnazije.

Prisutni su iznijeli mišljenje da smanjenje norme nije rješenje, jer dovodi do većeg problema, već da treba tražiti izdvajanje i povećanje koeficijenta matematičarima ili da se čas računa kao čas i po, kao u specijalističkim odjeljenjima. Istakli su da u Kotoru svi matematičari imaju po 24 časa, jer ne mogu naći nikoga da predaje matematiku, a potvrdili su da je ista situacija i u okruženju (Tivat, Budva, Herceg Novi, Petrovac).

ZANIMLJIVOSTI O KVADRATNIM BROJEVIMA

1. Razlika kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva.

U osmom razredu osnovne škole se uči o kvadratima. Postoji li lakši način da se izračuna razlika kvadrata dva uzastopna prirodna broja bez da se računa pismeno? Odgovor na ovo pitanje je da.

Lako je izračunati na primjer $6^2 - 5^2$; ali šta je sa većim brojevima poput $28^2 - 27^2$? I to se može izračunati na lakši način i sve se svodi na samo jednu formulu.

Ta formula je sljedeća:

$$\mathbf{(n + 1)^2 - n^2 = n + 1 + n} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1}$$

Ovdje n može da bude bilo koji prirodan broj, dok je $n+1$ njegov sljedbenik. Testiraćemo ovu formulu na nekim brojevima.

Primjer 1: $\boldsymbol{7^2 - 6^2}$ bi po formuli bilo jednako 13. Ovdje je $n = 6$ i $n + 1 = 7$.

$7^2 - 6^2 = 2 \cdot 6 + 1$
$49 - 36 = 12 + 1$
$13 = 13$

Formula je dokazana računanjem. Sada možemo da odradimo neki teži primjer.

Primjer 2:

n = 27 i ***n + 1 = 28***	**Provjera:**
$28^2 - 27^2 = 2 \cdot 27 + 1$	$28^2 = 784$
$28^2 - 27^2 = 54 + 1$	$27^2 = 729$
$28^2 - 27^2 = 55$	$784 - 729 = 55.$

Primjenom formule, kao i u provjeri, rezultat je isti, u ovom slučaju 55.

2. Povezanost između neparnih brojeva i kvadratnih brojeva.

Neparni brojevi su više povezani sa kvadratnim brojevima nego što mislite. Sada ćemo objasniti kako.

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81 = 9^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2$$

Vjerovatno ste zaključili da uzastopni neparni brojevi kada se saberu daju kvadrat određenog broja.

Ovdje n uzastopnih neparnih prirodnih brojeva počevši od 1 daju kvadrat broja n.

Primjer 1: Zbir prvih 15 prirodnih neparnih brojeva daje 15^2.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 15^2 = 225.$

Sa lijeve strane ima 15 brojeva, a na desnoj je 15^2.

Primjer 2: Zbir prvih 19 prirodnih neparnih brojeva daje 19^2.

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37=19^2=361.$

Sa lijeve strane ima 19 brojeva, a na desnoj je 19^2, što znači da ovo pravilo važi za svaki kvadratni broj.

Aleksandar Rnković, učenik VIII-3, JU OŠ „Oktoih“, Podgorica

SPISAK PRVIH 5 UČENIKA KOJI SU TAČNO RIJEŠILI NAGRADNI ZADATAK SA NASLOVNE STRANE IZ PROŠLOG BROJA DIJAGONALE:

1. Jakša Dragović, učenik VII razreda, JU OŠ „Njegoš", Kotor
2. Dina Huremović , učenica VII razreda, JU OŠ „Trpezi", Petnjica
3. Luka Božović, učenik VI razreda, JU OŠ „21. maj", Podgorica
4. Lara Tošić, učenica VIII - 4, JU OŠ „Dr Dragiša Ivanović", Podgorica
5. Almina Begović, učenica VII - 1, JU OŠ „Dušan Korać", Bijelo Polje

Redakcija časopisa sve njih nagrađuje besplatnim primjerkom Dijagonale broj 18.

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list: članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.

Ovaj broj se može kupiti u „**Gradskoj knjižari**" i „**Narodnoj knjizi**".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **510-206991-61** kod CKB banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcg.wordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >