Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €

BROJ 2 - GODINA 2018.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore
Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 2**
Godina 2018. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik: *mr Radomir Božović*
Odgovorni urednik: *Danijela Jovanović*
Redakcija: *Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*
Lektura: *Milja Božović, prof.*
Korektura: *Danijela Jovanović, prof.*
Priprema za štampu: *Branko Gazdić*
Tiraž: *1000*
Štampa: *„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Dragi učenici, nastavnici i roditelji,

Pred vama je drugi broj časopisa Dijagonala. Sa zadovoljstvom Vas obavještavamo da je naš prvi broj naišao na dobar prijem kod nastavnika i učenika. O tome svjedoče mejlovi i pisma koji su stigli na adrese Udruženja nastavnika matematike i redakcije časopisa.

Prvi broj nije bio u prodaji, već je čitav tiraž besplatno podijeljen nastavnicima matematike u svim osnovnim školama u Crnoj Gori, kao i bibliotekama svih osnovnih škola. Od ovog broja, pa nadalje, Dijagonala će moći da se kupi u knjižarama ili naruči pouzećem na adresu Udruženja.

Zahvaljujemo svim direktoricama/direktorima osnovnih škola iz Crne Gore koji su naručili određen broj primjeraka Dijagonale 2, koje će besplatno podijeliti svojim učenicima. Na taj način omogućavaju da Dijagonala nastavi da izlazi, a učenicima daju mogućnost da dođu do sadržaja časopisa.

Dragi učenici i nastavnici pišite nam, šaljite priloge, tekstove i zadatke za naredne brojeve Dijagonale. Tako će časopis biti raznovrsniji, sadržajniji i interesantniji.

S vjerom da ćemo još više i čvršće sarađivati, srdačno Vas pozdravljamo!

Redakcija

Dr Radoje Šćepanović

KRITERIJUMI DJELJIVOSTI S PROSTIM BROJEVIMA 7, 11, 13, 17, 19, 23

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv cijelim brojem b, ako postoji cijeli broj q takav da je $a = b \cdot q$. Broj a je djeljenik, b djelilac i q količnik. Na primjer, broj 48 je djeljiv sa 12, jer je $48 = 12 \cdot 4$.

U redovnoj nastavi matematike uče se osnovni kriterijumi djeljivosti sa brojevima: 2, 3, 9, 5, 4, 25, a na dodatnoj nastavi i kriterijum sa 11. Podsjetimo na kriterijum djeljivosti sa brojem 11: Cijeli broj je djeljiv sa 11 ako i samo ako je razlika zbira cifara na neparnim (parnim) i parnim (neparnim) mjestima u zapisu broja djeljiva sa 11.

Na primjer 72479 je djeljiv sa 11, jer je $(7+4+9)-(2+7)=20-9=11$. I broj 1061962 je djeljiv sa 11, jer je $(1+6+9+2)-(0+1+6)=18-7=11$. Broj $\underbrace{\overline{aa....aa}}_{2n \text{ cifara}}$, gdje je a cifra različita od nule, je djeljiv sa 11, jer je $\underbrace{a+a+....+a+a}_{n \text{ sabiraka}}-\underbrace{a+a+....+a+a}_{n \text{ sabiraka}}=0$.

Primjer 1. U broju 4758967* zamijeniti * cifrom tako da dobijeni broj bude djeljiv sa 11.

Označimo traženu cifru sa x. Tada je $(4+5+9+7)-(7+8+6+x)=4-x$ djeljiv sa 11, a to će biti ako je $x=4$.

Primjer 2. Dokazati da je broj $2019^{2019}-2019$ djeljiv sa 24.

Označimo dati broj sa m. Treba da dokažemo da je broj m djeljiv sa 3 i 8 $(24=3\cdot 8)$. Kako je

$$m=2019^{2019}-2019=2019\cdot\left(2019^{2018}-1\right)=2019\cdot\left(\left(2019^{1009}\right)^2-1\right)=$$
$$=2019\cdot\left(2019^{1009}-1\right)\left(2019^{1009}+1\right)$$

to je broj m djeljiv sa 3, jer je sa 3 djeljiv broj 2019. Znajući da je svaki stepen neparnog broja neparan broj, to su brojevi $2019^{1009}-1$ i $2019^{1009}+1$ parni, uz to su to dva uzastopna parna broja. Tada je jedan od njih djeljiv sa 2, a drugi sa 4, što znači da je njihov proizvod djeljiv sa 8. Slijedi, broj m je djeljiv sa 8, što je i trebalo dokazati.

Primjer 3. U prirodnom broju koji je djeljiv sa 165 između dvije uzastopne cifre umetnute su dvije nule. Dokazati da je novodobijeni broj takođe djeljiv sa 165.

Dati broj označimo sa n, a novodobijeni broj sa m. Treba da dokažemo da je broj m djeljiv sa 3, 5 i 11, jer je $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Kako su umetnute cifre nule, to je zbir cifara brojeva n i m jednak, tj. djeljiv je sa 3, što znači da je broj m djeljiv sa 3. Broj m je djeljiv i sa 5, jer se završava istom cifrom kao i broj n (0 ili 5). Uočimo da su zbirovi cifara na parnim (neparnim) mjestima u brojevima n i m jednaki, što znači da je broj m djeljiv sa 11, jer je sa 11 djeljiv i broj n.

Ovdje ćemo ova znanja proširiti kriterijumima o djeljivosti sa prostim brojevima 7, 11, 13, 17, 19, 23. Do njih ćemo doći uz malo istraživačkog rada.

Svaki prirodni broj m možemo zapisati u obliku $m = 10a + b$, gdje je a prirodan broj i b broj zapisan jednom od cifara. Uočimo da je broj b cifra jedinica broja m, a broj a „nastaje" kada se broju m „odsiječe" cifra jedinica. (Broj a je broj desetica u broju m, nije cifra desetica). Na primjer, $3628 = 10 \cdot 362 + 2$, $893678 = 10 \cdot 89367 + 8$.

Ideja koju ćemo realizovati satoji se u tome da se broj m prikaže u obliku zbira dva broja od kojih je jedan djeljiv sa nekim brojem k (na primjer, $k = 7, 13, 17, 19, 23$). Da bi i broj m bio djeljiv sa k mora sa k biti djeljiv i drugi sabirak. Sada ćemo broj m zapisati u obliku

$$m = 10a + b = k(a + pb) + (10 - k)(a + qb), \tag{1}$$

gdje su p i q brojevi koji se određuju kao cjelobrojna rješenja jednačine

$$kp + (10 - k)q = 1. \tag{2}$$

Formula (2) slijedi iz formule (1) izjednačavajući koeficijente uz cifru b. Prvi sabirak u (1) je djeljiv sa k, a broj m će biti djeljiv sa k ako i samo ako je broj $a + qb$ djeljiv sa k.

U opštem slučaju jednačina (2) ima beskonačno mnogo rješenja. Za svako konkretno rješenje dobijamo po jedan kriterijum o djeljivosti broja m sa k. Ovdje ćemo navesti po jedan ili dva slučaja, a vama dragi učenici/ce ostavljamo da i sami nađete neko od rješenja jednačine (2) i tako imate sopstveni kriterijum o djeljivosti sa 7 (11, 13, 17, 19, 23).

Važna napomena: Cifre su simboli kojima se pišu brojevi. Ne postoje male i velike cifre. Ima smisla govoriti o velikim ili malim brojevima, a nema o velikim ili malim ciframa.

1) Djeljivost sa 7.

a) Broj m zapišimo u obliku

$$m = 10a + b = 7(a+b) + 3(a - 2b). \tag{3}$$

Kako je prvi sabirak djeljiv sa 7, to slijedi da je broj m djeljiv sa 7 ako i samo ako je broj $a - 2b$ djeljiv sa 7. Dakle, važi pravilo:

Broj *m* je djeljiv sa 7 ako i samo ako je razlika broja *m* bez poslednje cifre i dvostruke vrijednosti broja zapisanog poslednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 7.

Broj 189 je djeljiv sa 7, jer je razlika 18-18=0 djeljiva sa 7.

Navedeni postupak se može više puta ponoviti u jednom zadatku. Na primjer, ispitati da li je broj 332605 djeljiv sa 7. Postupak rješavanja je prikazan na sl. 1.

332605
-10
33250
-0
3325
-10
322
-4
28
Kako je broj 28
djeljiv sa 7,
to je broj 332605
djeljiv sa 7.

Slika 1

b) Broj m zapišimo u obliku

$$m = 10a + b = 7(a + 4b) + 3(a - 9b). \tag{4}$$

Slično prethodnom, možemo zaključiti:

Broj *m* je djeljiv sa 7 ako i samo ako je razlika broja *m* bez poslednje cifre i devetostruke vrijednosti broja zapisanog poslednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 7.

Pored oblika (3) i (4) broj m se može prikazati na mnogo drugih načina i tako dobiti različiti kriterijumi djeljivosti broja m sa 7.

Koristeći prethodno tvrđenje dokazaćemo da broj 77826912 nije djeljiv sa 7 (sl. 2).

77826912
-18
7782673
-27
778240
-0
77824
-36
7746
-54
720
-0
72
Kako broj 72
nije djeljiv sa 7,
to ni broj 77826912
nije djeljiv sa 7.

Slika 2

2) Djeljivost sa 11.

$$m = 10a + b = 11a + b - a.$$

Broj *m* je djeljiv sa 11 ako i samo ako je razlika broja *m* bez poslednje cifre i broja zapisanog poslednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 11.

Primjer 4. Odrediti nepoznate cifre x i y tako da broj $\overline{20956xy}$ bude djeljiv sa 66.

Označimo dati broj sa m. Kako je $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, to je dovoljno dokazati da je broj m djeljiv sa 2, 3 i sa 11. Da bi bio djeljiv: sa 2 mora biti $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (1); sa 3 mora biti $22 + x + y$ djeljiv sa 3, tj. $1 + x + y$ djeljiv sa 3 (2); a da bi bio djeljiv sa 11 mora biti $y - x + 12$ djeljiv sa 11, tj. $y - x + 1$ djeljiv sa 11 (3). Uslovi (1), (2) i (3) su zadovoljeni ako je $x = 3$ i $y = 2$.

3) Djeljivost sa 13.

a) $m = 10a + b = 13(a - 2b) - 3(a - 9b)$.

Broj *m* je djeljiv sa 13 ako i samo ako je razlika broja *m* bez poslednje cifre i devetostruke vrijednosti broja zapisanog poslednjom cifrom djeljiva sa 13.

b) $m = 10a + b = 13(a + b) - 3(a + 4b)$.

Broj *m* je djeljiv sa 13 ako i samo ako je zbir broja *m* bez posljednje cifre i četvorostruke vrijednosti broja zapisanog posljednjom cifrom broja *m* djeljiv sa 13.

4) Još jednom o djeljivosti sa 7, 11 i 13.

Svi brojevi djeljivi sa 1001 djeljivi su sa 7, 11 i 13, jer je $1001=7\cdot 11\cdot 13$. Važi i obratno: broj koji je djeljiv sa 7, 11 i13 djeljiv je sa 1001. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti da naučimo još jedan kriterijum djeljivosti sa 7, 11 i 13. Da bismo saznali da li je broj n djeljiv sa m, gdje je m =7, 11, 13, potrebno je njegov (dekadni) zapis razbiti na grupe od po tri cifre idući sa desna na lijevo (grupa koja se nalazi na početku broja može imati tri, dvije ili jednu cifru) i uzeti grupe na neparnim mjestima sa znakom minus (−), a na parnim mjestima sa znakom plus (+), ili obratno.

Izvršimo sabiranja tako dobijenih grupa smatrajući da su to brojevi zapisani tim ciframa. **Ako je tako dobijeni brojevni izraz djeljiv sa *m*, tada je i broj *n* djeljiv sa *m*.**

Dokaz ćemo izvesti za šestocifrene brojeve. Neka je $n = \overline{abcdef}$ zadati šestocifreni broj. Prvo, razbijmo zapis ovog broja na grupe od po tri cifre počev od desne strane prema lijevoj. Tada je $n = \overline{\underline{abc}\,\underline{def}} = \overline{abc}\cdot 1000 + \overline{def} = \overline{abc}\cdot 1001 + \overline{def} - \overline{abc}$. Odavde slijedi, broj n je djeljiv sa 1001 (sa $7\cdot 11\cdot 13$) ako i samo ako je broj $\overline{def} - \overline{abc}$ djeljiv sa 1001 (sa $7\cdot 11\cdot 13$). Analogno se dokaz izvodi i u opštem slučaju.

Primjer 5. a) Broj 25011 je djeljiv sa 7, jer je $25 - 11 = 14$ djeljiv sa 7. b) Broj 452387 je djeljiv sa 13, jer je $452 - 387 = 65$ djeljiv sa 13. c) Broj 47025 je djeljiv sa 11, jer je $25 - 47 = -22$ djeljivo sa 11. d) Broj 3455452 je djeljiv sa 1001. Stvarno, zapis datog broja razbijmo, sa lijeve na desnu stranu, na grupe od po tri cifre: $\underline{3}\,\underline{455}\,\underline{452}$. Dalje je $452 + 3 - 455 = 0$, a 0 je djeljiva sa 7, 11 i 13. Slijedi, dati broj je djeljiv sa 1001.

5) Djeljivost sa 17.

a) $m = 10a + b = 17(a - 2b) - 7(a - 5b).$

Broj *m* je djeljiv sa 17 ako i samo ako je razlika broja *m* bez posljednje cifre i petostruke vrijednosti broja zapisanog posljednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 17.

b) $m = 10a + b = 17(a + 5b) - 7(a + 12b).$

Broj *m* je djeljiv sa 17 ako i samo ako je zbir broja *m* bez posljednje cifre i dvanestostruke vrijednosti broja zapisanog posljednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 17.

Primjer 6.

a) Broj 59177 je djeljiv sa 17, jer je:
$5917 - 35 = 5882,\ 588 - 10 = 578,\ 57 - 40 = 17$ (djeljiv je sa 17).

b) Ako je broj $a + 13b$ djeljiv sa 17, dokazati da je i broj $25a + 53b$ djeljiv sa 17.

Ideja za rješavanje ovakvih zadataka je sljedeća: dati broj zapisati u obliku zbira dva broja od kojih je svaki djeljiv sa 17. U konkretnom slučaju to možemo uraditi, na primjer, ovako: $25a + 53b = 8(a + 13b) + 17(a - 3b)$. Prvi sabirak je djeljiv sa 17 po pretpostavci u zadatku, a drugi je očigledno djeljiv sa 17.

6) Djeljivost sa 19.

$$m = 10a + b = 19(a + b) - 9(a + 2b).$$

Broj *m* je djeljiv sa 19 ako i samo ako je zbir broja *m* bez posljednje cifre i dvostruke vrijednosti broja zapisanog posljednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 19.

Primjer 7. U broju $\overline{7x6066}$ odrediti cifru x tako da dati broj bude djeljiv sa 19.

$\overline{7x606}+12=\overline{7x618}$, $\overline{7x61}+16=\overline{7x77}$, $\overline{7x7}+14=\overline{7(x+2)1}$,

$\overline{7(x+2)}+2=\overline{7(x+4)}$. Broj $\overline{7(x+4)}$ je djeljiv sa 19, za $x = 2$, jer je $76 = 4 \cdot 19$.

Napomena: zadatak smo riješili pod pretpostavkom da je $x + 2 \leq 9$ i $x + 4 \leq 9$. Šta ako je $x + 2 > 9$, ili $x + 4 > 9$? Na primjer, neka je $x + 2 > 9$.

Tada $\overline{7x7}+14=7\cdot 100+(x+2)\cdot 10+1=8\cdot 100+(x-8)\cdot 10+1=\overline{8(x-8)1}$.
Slično se postupa i u slučaju $x + 4 > 9$.

7) Djeljivost sa 23.

a) $m = 10a + b = 23(a + 4b) - 13(a + 7b)$.

Broj *m* je djeljiv sa 23 ako i samo ako je zbir broja *m* bez posljednje cifre i sedmostruke vrijednosti broja zapisanog posljednjom cifrom broja *m* djeljiva sa 23.

Primjer 8. a) Broj 2942022 je djeljiv sa 23. Stvarno, 294202 + 14 = 294216, 29421 + 42 = 29463, 2946 + 21 = 2967, 296 + 49 = 345, 34 + 35 = 69. Broj 69 je djeljiv sa 23, jer je $69 = 3 \cdot 23$.

b) Broj m zapišimo u obliku

$$m=100a+\overline{bc}=23\left(4a-\overline{bc}\right)+8\left(a+3\overline{bc}\right).$$

Ovdje je a broj stotina broja m (a nije cifra stotina broja m).

Broj m je djeljiv sa 23 ako i samo ako je zbir broja stotina od m i trostrukog broja zapisanog sa poslednje dvije cifre broja m djeljiv sa 23.

Primjer 9. Broj 1642729 je djeljiv sa 23. Dovoljno je razmotriti sljedeći niz jednakosti: $16427 + 3 \cdot 29 = 16514$, $165 + 3 \cdot 14 = 207$, $2 + 21 = 23$.

Na sličan način se mogu izvesti i kriterijumi za dijeljenje sa brojevima, na primjer, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Na kraju, bez dokaza, navedimo kriterijume djeljivosti sa: 99, 101, 2^m i 5^m (m=1, 2, 3...).

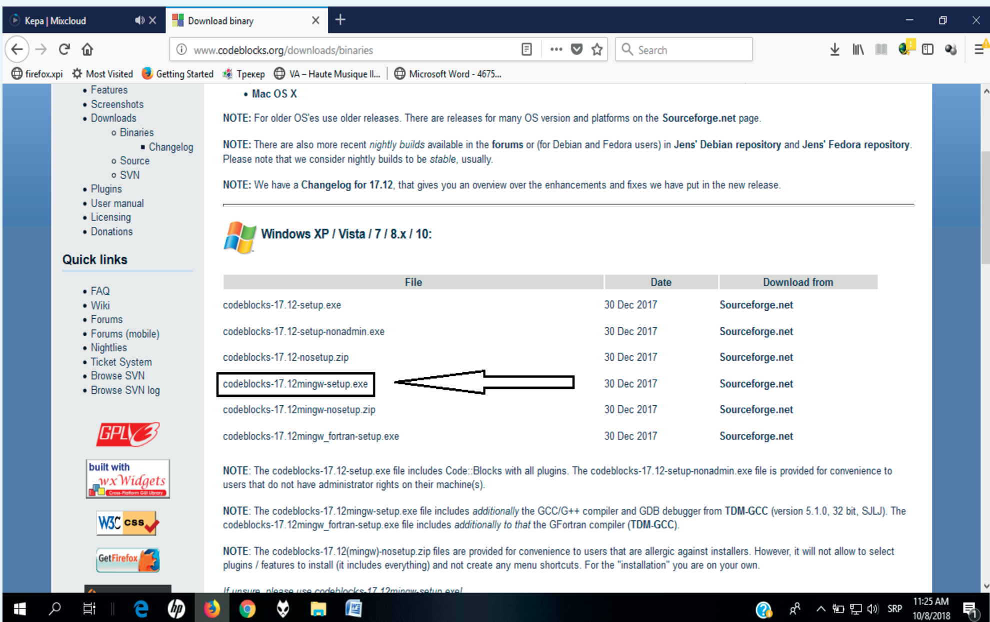
Dr Goran Šuković

INSTALIRANJE RADNOG OKRUŽENJA ZA PROGRAMSKI JEZIK C++

Da bi napisali program u programskom jeziku C++ neophodno je na računaru instalirati odgovarajući prevodilac (kompajler). Pokazaćemo kako da napišite vaš prvi program primjenom programa CodeBlocks.

1. Radno okruženje CodeBlocks – instalacija

    a. Download-ujte CodeBlocks sa sajta http://www.codeblocks.org/downloads/binaries . Ako koristite neki Microsft Windows operativni sistem (XP/Vista/7/8/10), preuzmite verziju koja je označena strelicom na slici:



    b. Ako koristite drugi operativni sistem (Linux ili Mac OS), preuzmite odgovarajuću verziju sa sajta.

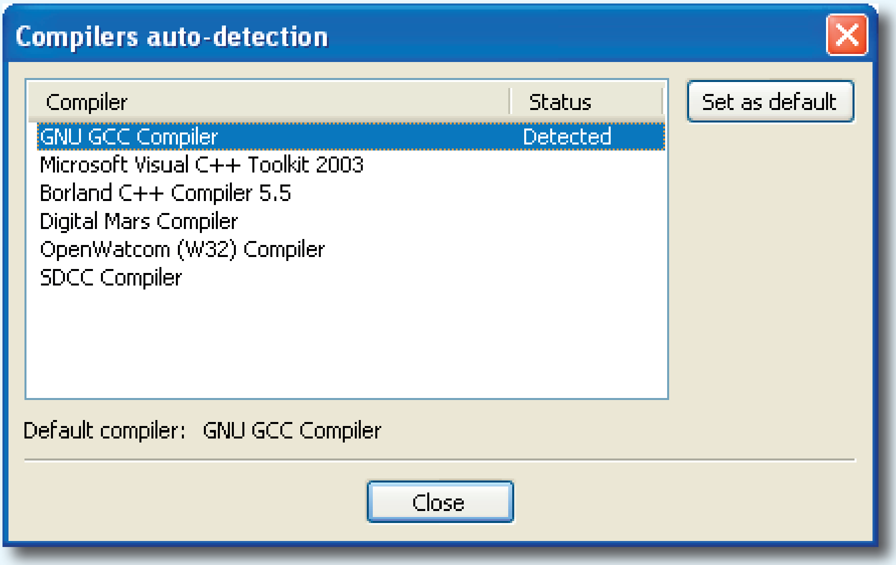
    c. Ako već imate instaliran CodeBlocks na računaru, preporučuje se da ga prvo deinstalirate (iz menija Start, odaberite opciju Uninstall CodeBlocks, ili kroz Add/Remove programs iz Control panel-a...).

d. Dvostrukim klikom pokrenite instalacioni program i odradite punu instalaciju (više puta kliknite Next i na kraju Finish). Podrazumijevani folder u kojem se instalira CodeBlocks je ***C:\Program Files\CodeBlocks***, ali vi možete izabrati i drugi folder.

2. Kreirati folder Skola2017. U ovom folderu će ce čuvati svi vaši programi u toku ovog kursa.

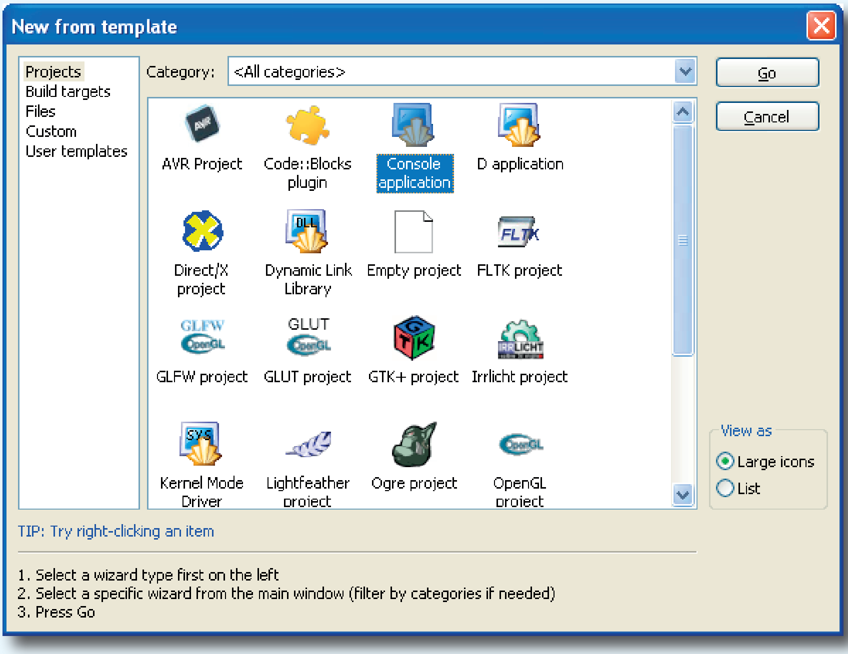
3. Pokrenite CodeBlocks.

a. Prvi put kada pokrenete CodeBlocks otvara se prozor ***Compilers auto-detection***. Od vas se zahtijeva da izaberete odgovarajući kompajler (vidi sliku ispod). U zavisnosti od programa koje imate na vašem računaru, lista sa slike može izgledati i drugačije. Važno je da kao podrazumijevani (default) kompajler izaberete GNU GCC Compiler, kako je prikazano na slici. Pritisnite taster <Enter> na tastaturi.

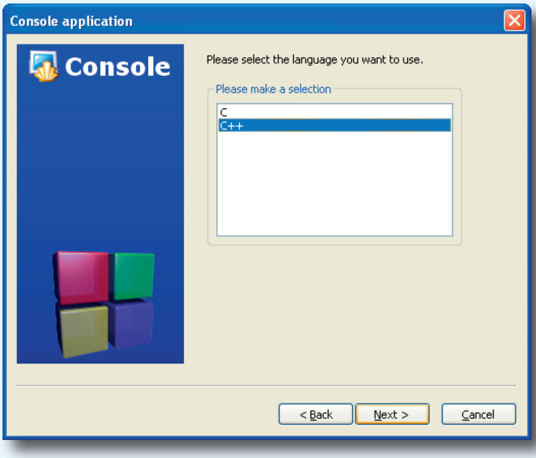


b. U sljedećem koraku CodeBlocks može da vas pita da li želite da asocirate (associate) C/C++ fajlove sa ovim programom. Preporučujemo da izaberete opciju Yes, pa će se dvostrukim klikom na fajl sa ekstenzijom .c ili .cpp odmah pokretati CodeBlocks.

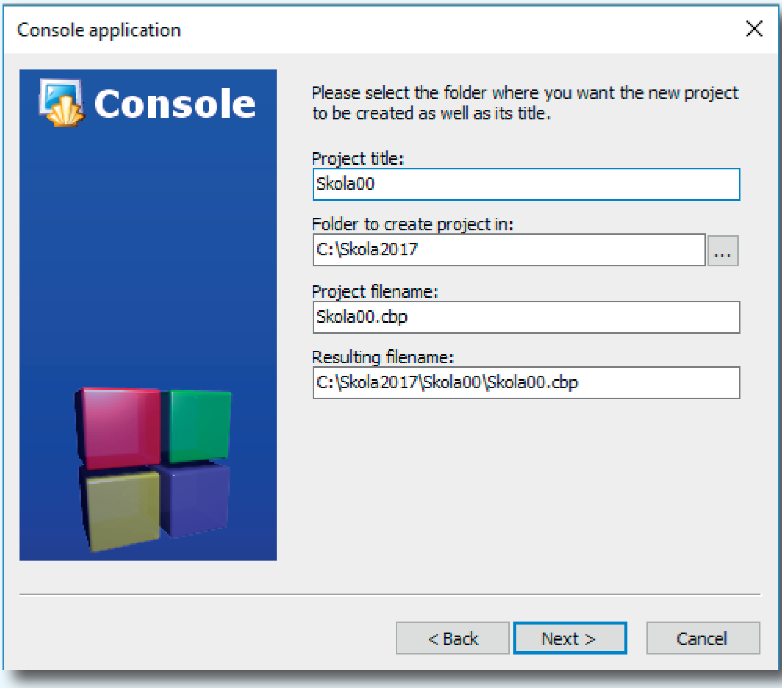
c. Kliknite na meni ***File***, pa podmeni ***New...*** i kliknite na opciju ***Project...***. Otvara se sljedeći prozor:



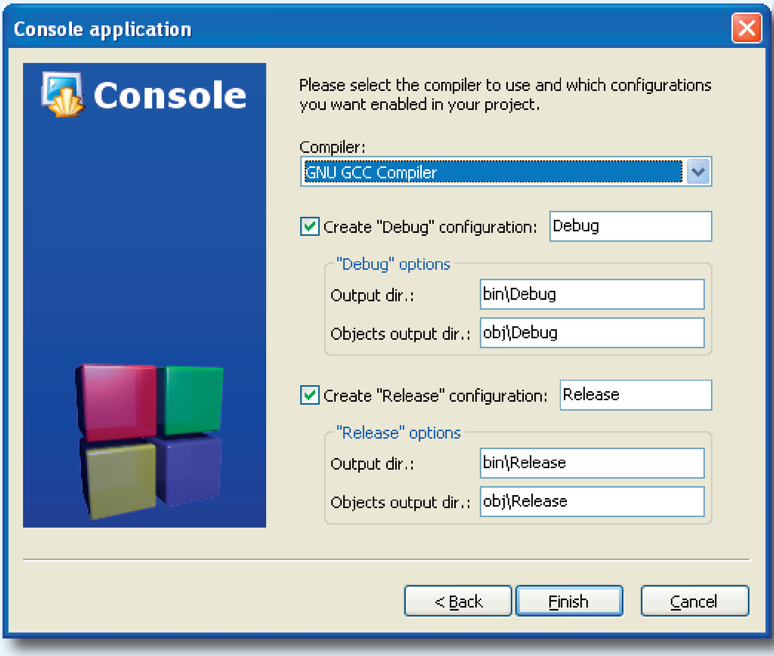
d. Izaberite opciju ***Console application*** i kliknite na dugme ***Go***. Otvara se prozor za izbor jezika (slika ispod):



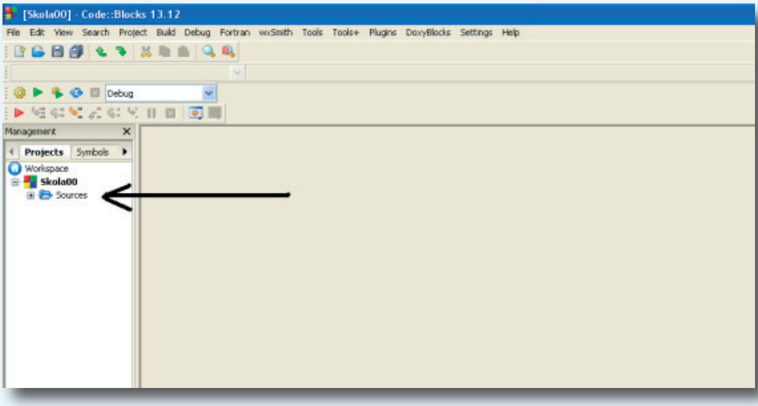
e. Izaberite C++ iz liste i kliknite na dugme ***Next***. Otvara se prozor u kojem morate unijeti ime vašeg projekta i folder u kojem će se sačuvati vaši fajlovi. Za ime projekta (***Project title***) unesite *Skola00*, a u polje ***Folder to create project in*** , klikom na dugme sa tri tačkice (...), izaberite folder Skola2017 (koji ste ranije kreirali, u koraku 2) – vidi sliku ispod.



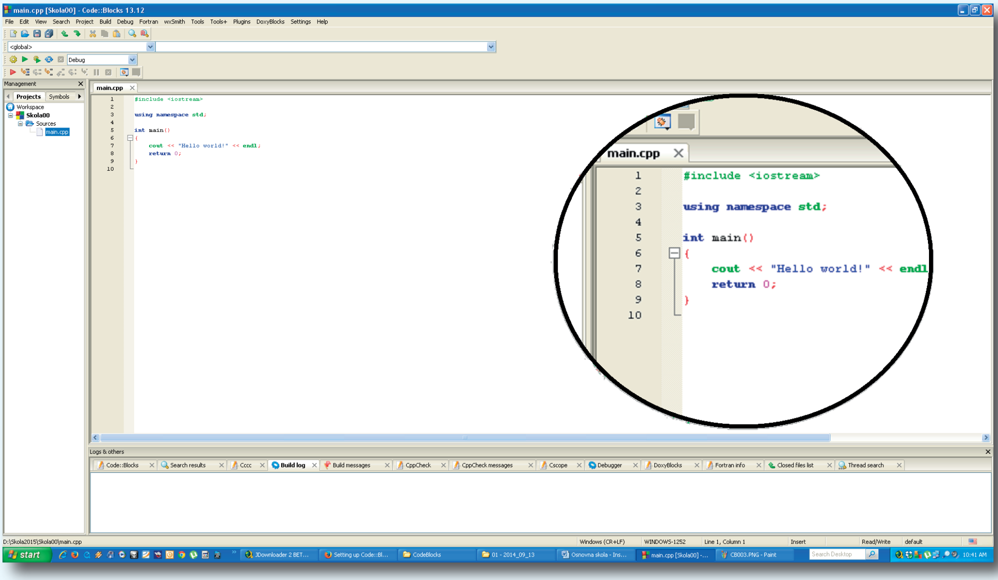
f. Klikom na dugme ***Next***, otvara se prozor za izbor kompajlera (slika ispod). Ne mijenjajte ništa u ovom prozoru i kliknite na dugme ***Finish***.



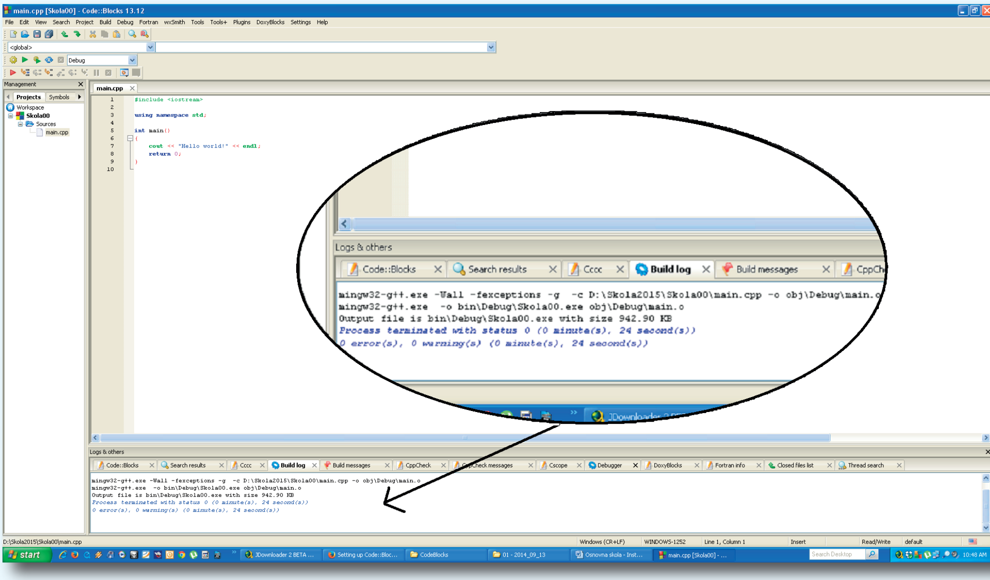
g. Otvara se prozor sa radnim okruženjem.



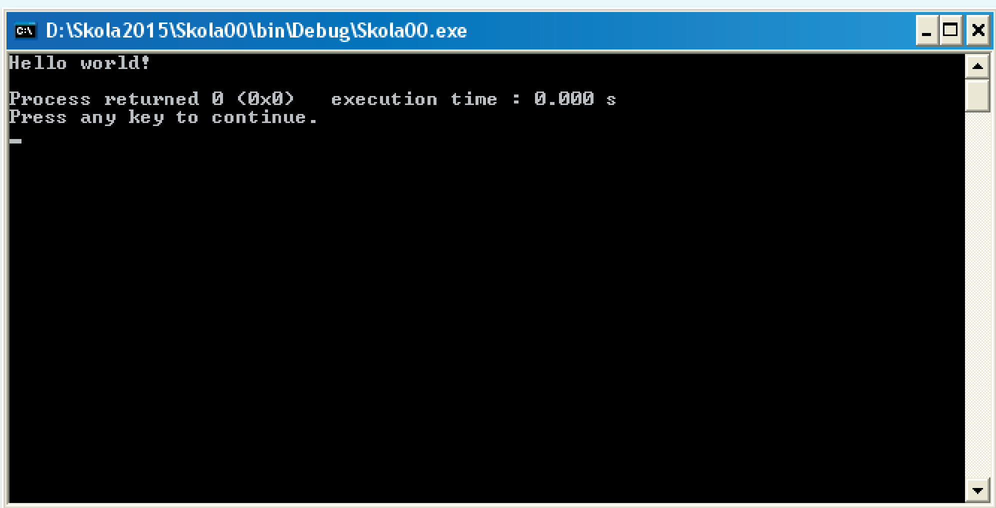
h. Kliknite na simbol + pored stavke ***Source*** (označen strelicom na slici iznad) i dvostrukim klikom na fajl *main.cpp* prikazuje se sadržaj tog fajla.



i. Sada testirajte da li sve radi kako treba. Izaberite stavku menija ***Build***, i u njoj prvu opciju koja se takođe zove ***Build*** (ili istovremeno pritisnite kombinaciju tastera ***CTRL+F9***). Proces prevođenja vašeg programa počinje i može trajati od nekoliko sekundi do nekoliko minuta, zavisno od veličine programa. Sačekajte da u donjem dijelu ekrana dobijete poruku sličnu onoj kao na slici ispod.



j. Posljednji red poruke vam govori da vaš program nema grešaka i da ga je moguće pokrenuti. Ponovo izaberite stavku menija ***Build*** i njoj opciju ***Run*** (ili istovremeno pritisnite kombinaciju tastera ***CTRL+F10***). Vaš program se pokreće u novom prozoru, takozvanoj konzoli, i štampa odgovarajuću poruku (vidi sliku ispod):



k. Pritisnite bilo koji taster na tastaturi da zatvorite konzolu.

l. Zatvorite CodeBlocks: meni ***File***, opcija ***Quit*** ili samo zatvorite prozor.

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

I nivo

1. Date su četiri različite tačke M, N, S i E. Koliko je najviše pravih, a koliko duži određeno tim tačkama? Ispitati sve slučajeve!

2. Data je prava a i tačke A, B, C i D redom, koje pripadaju pravoj a. Odrediti:
   a) $AC \cap BD$; b) AD U BC; c) $BC \setminus AD$;
   d) $BD \setminus AC$; e) $AB \cap CD$; f) $AD \cap BC$.

3. Nacrtati proizvoljan krug, pa ga podijeliti na:
   a) dva;
   b) četiri podudarna kružna isječka. Uporediti tako dobijene centralne uglove.

4. a) Odrediti komplementan ugao uglu $\alpha = 72°13'45''$;
   b) Odrediti suplementan ugao uglu $\beta = 109°43''$.

5. Dati su uglovi $\alpha = 29°31'40''$ i $\beta = 72°43'38''$
   Izračunati: a) $2 \cdot \alpha + \beta$; b) $\beta : 2 + \alpha$; c) $3 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$; d) $4 \cdot \beta - 2 \cdot \alpha$.

6. Nacrtati tri oštra ugla α, β, γ; $\alpha < \beta < \gamma$, a zatim konstruisati i izmjeriti uglove:
   a) $\alpha + \beta$; b) $\beta + \gamma$; c) $\alpha + \gamma - \beta$; d) $2 \cdot \beta - \alpha$.

7. Jedan od dva uporedna ugla je dva puta veći od drugog. Izračunati njihove mjere.

8. Da li rješenja jednačina $x + 52° = 61°30'$ i $x - 40° = 40°30'$ obrazuju:
   a) par komplementnih uglova; b) par suplementnih uglova?

9. a) Koliko je centimetara u: 1/10 dm; 7/10 dm; 1/100 m; 37/100 m?
   b) Koliko je grama u: 1/2 kg; 35/1000 kg; 378/1000 kg?

10. Od 32 učenika petog razreda 1/4 su članovi likovne sekcije, a 1/8 svih učenika su članovi matematičke sekcije. Koliko svaka od tih sekcija ima učenika?

II nivo

1. Data je prava a i duž MN, gdje je $MN \subset a$. Odredi tačke C, D i E tako da je $C \in MN$, $D \in a \setminus MN$ i $E \notin a$.

2. Dato je pet različitih tačaka od kojih nikoje tri ne pripada istoj pravoj. Koliko je ukupno pravih, a koliko duži određeno tim tačkama?

3. Dvije prave se sijeku tako da je zbir tri od tih uglova $269°20'$. Odrediti veličine tih uglova.
4. Izračunati mjeru ugla koji je za $30°$ veći od svog suplementa.
5. Zbir dva unakrsna ugla je $117°31'40''$. Odrediti mjere tih uglova, a zatim odrediti mjere njima uporednih uglova.
6. Odrediti suplementan ugao uglu koji je za $10°20'30''$ veći od svog komplementnog ugla.
7. Od ukupnog broja učenika u odjeljenju 2/5 čine dječaci. Ako bi došlo još 3 dječaka, tada bi broj dječaka i djevojčica bio jednak. Izračunati ukupan broj učenika u odjeljenju.
8. Jedna cijev napuni bazen za 12, a druga za 10 časova. Da li veći dio bazena napuni prva cijev za 8 časova ili druga cijev za 6 časova?
9. Koji je ugao osam puta veći od svog:
   a) uporednog ugla; b) komplementnog ugla?
10. Ako brojeve 349 i 413 podijelimo istim brojem k, dobijamo redom ostatke 7 i 8. Izračunati broj k.

Bošković Vladan i Musić Sabahudin, OŠ „Oktoih“, Podgorica

VII razred

I nivo

1. Ako je: $a = -12 : (-4) - 3$, $b = -12 : ((-4) \cdot (-3))$ i $c = -12 : 4 + (-3)$, uporediti brojeve $(a + b + c)$ i $(a \cdot b \cdot c)$.
2. Vrijednost izraza $(-1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot 7 \cdot 8 \cdot (-9) \cdot (-10)) : 15120$ je:

   a) -120; b) 240; c) 120; d) 360; e) 945.

   Zaokružiti slovo ispred tačnog odgovora.
3. Riješiti jednačine:
   a) $(15 - 2x) : (-3) + 8 = 5$; b) $(9 - 4x) \cdot (-2) + 22 = -20$.
4. Umjesto * staviti znak >, < ili =, tako da važi:
   a) $-7x \cdot y < 0$, $x < 0$ *i* $y * 0$;

   b) $7 : (-x) < 0$, $x * 0$;

   c) $|x-7| \cdot (-7) \geq 0$, $x * 7$;

   d) $x + y < 0$, $x > 0$ *i* $|x| * |y|$.

5. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja:

   a) Težište trougla može biti van trougla.

   b) Simetrala unutrašnjeg ugla kod tjemena A sa stranicom AB obrazuje ugao od 35°, a sa stranicom BC ugao od 85°. Uglovi tog trougla su 50°, 60° i 70°?

   c) Ortocentar pravouglog trougla se nalazi u tjemenu pravog ugla.

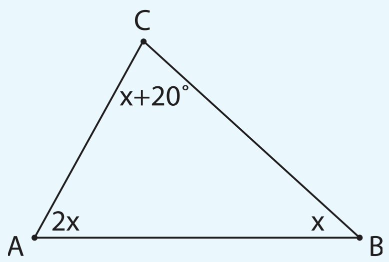
   d) Visina povučena iz vrha jednakokrakog trougla sa kracima obrazuje uglove od 40°. Ugao na osnovici je 55°.

6. a) Kod pravouglog ΔABC unutrašnji ugao iznosi 1/8 susjednog spoljašnjeg ugla. Izračunati mjere unutrašnjih uglova ΔABC.

   b) Neka jedan oštar ugao iznosi 2/7 drugog oštrog ugla pravouglog ΔABC. Izračunati mjere unutrašnjih uglova ΔABC.

7. a) Prema podacima sa slike izračunati mjere unutrašnjih uglova ΔABC.

   b) Kojoj vrsti, u odnosu na uglove, pripada ovaj trougao?



8. Ako se simetrale dva unutrašnja ugla ΔABC sijeku pod uglom od 135°, dokazati da je taj trougao pravougli.

9. Neka je O centar kruga upisanog u pravougli trougao ABC ($\sphericalangle C = 90°$). Izračunati uglove ΔABC ako je razlika uglova BOC i AOC jednaka 25°.

10. Zaokružiti slova ispred tačnih tvrđenja:

   a) Postoji trougao kod koga su dva unutrašnja ugla prava.

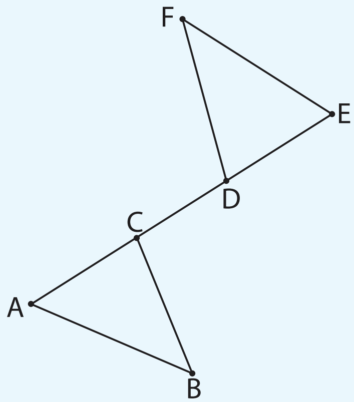
   b) Unutrašnji ugao trougla i njegov odgovarajući spoljašnji ugao su suplementni.

   c) Simetrale unutrašnjih uglova jednakostraničnog trougla sijeku se pod uglom od 120°.

d) Ako je ugao na osnovici jednakokrakog trougla 55°, onda je osnovica kraća od kraka.

e) Postoji jednakokraki trougao čija je osnovica 4 cm, a krak 2 cm.

11. Ako je AB = EF, AB EF, i AD = CE (na slici), dokazati da je FD = CB.



12. Tačka T je težište, a tačka O je centar opisanog kruga u pravouglom ΔABC ($\sphericalangle$C = 90°). Koliko puta je duž AB veća od duži TO?

II nivo

1. Izračunati:

   a) $a + 2b + |a : 3 - b|$, ako je $-a = 18 : (-2)$ *i* $b = 6 + 4 \cdot 2$;

   b) $2n - |n + m : 2| + m$, ako je $-m = n$ *i* $n = -16 + 8 : (-2)$.

2. Riješiti nejednačine:

   a) $2 \cdot |x| - 11 < -1$;

   b) $3 \cdot |x| - 13 < -4$.

3. a) Odredititi nepoznati djelilac ako je djeljenik jednak zbiru broja – 4 i proizvoda brojeva – 2 i 8, a količnik jednak razlici brojeva – 16 i – 20.

   b) Odrediti nepoznati djeljenik ako je djelilac jednak razlici brojeva – 2 i 3, a količnik jednak zbiru broja – 5 i proizvoda brojeva – 3 i – 2.

4. Učenik je zamislio tri cijela broja tako da je zbir prvog i drugog – 18, razlika prvog i trećeg – 8, a razlika drugog i trećeg 2. Koji su to brojevi?

5. Za koje cijele brojeve x važi da je:

a) $|a - 15| = |a + 17|$;

b) $|a - 15| = |a - 17|$.

6. Za koje cijele brojeve x važi da je je $(5x + 3) : 2 \leq -6$ i $(5x + 2) : 3 \geq -6$?

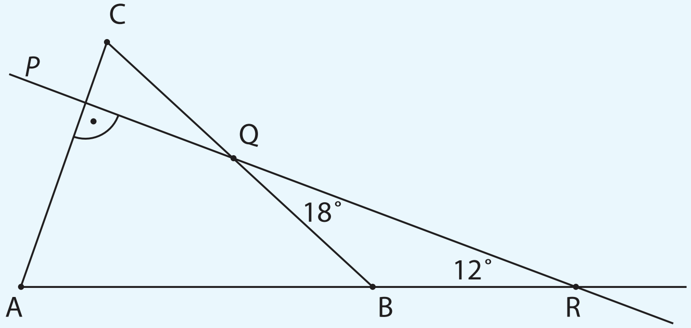
7. a) Neka u ABC unutrašnji ugao α iznosi 1/3 susjednog spoljašnjeg ugla α_1, a spoljašnji ugao γ_1 za 80° veći od susjednog unutrašnjeg ugla γ. Koja stranica ΔABC je najduža? Zašto?

b) Neka u ΔABC spoljašnji ugao α_1 iznosi 4/5 susjednog unutrašnjeg ugla, a ugao β za 60° manji od susjednog spoljašnjeg ugla γ. Koja stranica ΔABC je najkraća? Zašto?

8. Simetrala unutrašnjeg ugla na osnovici i spoljašnjeg ugla pri vrhu jednakokrakog ΔABC sijeku se pod uglom od 35°. Izračunati mjere unutrašnjih uglova ΔABC.

9. Neka je ΔABC pravougli ($\sphericalangle C = 90°$) sa jednim oštrim uglom od 66°. Izračunati ugao koji grade simetrala pravog ugla i normala iz tjemena pravog ugla na hipotenuzu.

10. Prema podacima sa slike izračunati mjere unutrašnjih uglova ΔABC.



11. Dat je pravougli ΔABC. Na produžetku hipotenuze AB uoči tačke E i F tako da je CA = AF = BE. Izračunati $\sphericalangle ECF$.

12. Tačka S je centar kruga upisanog u ΔABC, AC = 10 cm, BC =12 cm. Prava a koja sadrži tačku S i paralelna je stranici AB siječe AC i BC redom u tačkama P i Q. Izračunati obim ΔCPQ.

Nevena Ljujić, OŠ „Dušan Korać“, Bijelo Polje

VIII razred

I nivo

1. Zapisati u obliku razlomka decimalni broj: a) $0,\dot{2}$ b) $0,\dot{3}\dot{6}$ c) $1,\dot{7}\dot{2}$ d) $-2,\dot{1}3\dot{5}$.

2. Dati su skupovi : $A = \left\{\sqrt{12},\ \sqrt{144},\ \frac{\sqrt{9}}{2},\ \sqrt{\frac{25}{2}},\ 2\sqrt{18},\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right\}$ i

   $B = \left\{\sqrt{6},\ \sqrt{625},\ \frac{\sqrt{12}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}},\ 2\sqrt{166},\ 2-\sqrt{3},\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\right\}$.

   a) Izdvojiti racionalne brojeve iz skupa A;
   b) Izdvojiti iracionalne brojeve iz skupa B.

3. Koristeći se pravilima $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a \geq 0$ i $b \geq 0$ i $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

   za $a \geq 0$, i $b > 0$, izračunati sledeće korijene:

   a) $\sqrt{64\cdot 49}$; $\sqrt{0,49\cdot 0,25\cdot 16}$; $\sqrt{0,01\cdot 81\cdot 0,0004}$;

   b) $\sqrt{\frac{121}{100}}$; $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 5\frac{4}{9}}$; $\sqrt{1,44\cdot 3\frac{1}{16}}$.

4. Izračunati vrijednosti izraza :

   a) $\sqrt{\left(-1\frac{3}{4}\right)^2} + \sqrt{1+\frac{9}{16}}$,

   b) $\sqrt{(-1)^2} + \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(-4)^2}$,

   c) $\sqrt{(-1)^2} - \left(\sqrt{3\frac{1}{5}} : \sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{4\frac{1}{6}} : \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

5. Uprostiti izraze :

   a) $4\sqrt{2} - \sqrt{72} + 2\sqrt{50}$;

   b) $(20\sqrt{150} - 3\sqrt{54} + \sqrt{96} - 4\sqrt{24})\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$;

   c) $\sqrt{3} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$.

6. Svaki od sljedećih brojeva predstavlja neki od stepena: 2^k, 3^k, $(-5)^k$. Odrediti izložilac kod svakog od brojeva:

   a) 243; b) 32; c) 128; d) 729;
   e) 625; f) –5; g) – 125; h) 512.

7. Izračunati:

a) $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-2)^3$; b) $(-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4$;

c) $25^2 \cdot (0{,}2)^4 - 2^6 \cdot 0{,}125^2 + 4^3 \cdot (0{,}5)^6$.

8. Izvršiti naznačene operacije:

a) $(-x^4)^3 \cdot (-x^5)^4$, b) $(a^2bc^4) \cdot (a^3b^3c^4) : (a^2b^2c^2)$,

c) $(2a^2b^3)^3 \cdot (4a^2b^2)^3 : (16a^4b^7)^2$.

9. Uporediti vrijednosti stepena:

a) 2^{300} i 3^{200}; b) 10^{20} i 90^{10}; c) 333^{444} i 444^{333}.

10. Srediti izraze :

a) $6(3b^2 - 2b + 2)$;

b) $4a(5a - 3 + ab) - 10(2a^2 - 3 + 3a + 2a^2b)$;

c) $(5a + 2b - 4)(-2a - 3b)$.

11. Rastaviti na činioce:

a) $4a^3b^3 - 8a^2b^2$; b) $3ax - 4by - 4ay + 3bx$;

c) $64 - \frac{1}{9}x^2$; d) $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2$.

12. Ako je $A = 2x - y$, $B = x + 2y$, $C = x + y$, odrediti izraz:

$A \cdot B - C^2$.

II nivo

1. Dokazati da su brojevi: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{7}$; c) $3\sqrt{2}$ iracionalni.
2. Uporediti brojeve: a) $2 - \sqrt{3}$ i $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$;

   b) $3\sqrt{2} + \sqrt{20}$ i $\frac{2}{2\sqrt{5} - \sqrt{18}}$.

3. Izračunati na dvije decimale: a) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;

   b) $\sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{7}}}$.

4. U školskoj svečanoj sali stolice su grupisane u tri skupine: lijevo, desno i u sredini, tako da je u svakoj jednak broj stolica. U svakoj skupini ima onoliko redova, koliko ima stolica u svakom redu. Ako ima ukupno 432 sjedišta, koliko ima redova stolica?

5. Izračunati vrijednosti izraza:

a) $27 \cdot 111^3 - 333^3$; b) $(\frac{1}{2}) \cdot (-1)^{2k+2} - \frac{1}{3} \cdot (-1)^{2k+3}$;

c) $(27^{10} - 5 \cdot 81^4 \cdot 3^{12} + 4 \cdot 9^8 \cdot 3^8) : (41 \cdot 3^{24})$.

6. Dokazati da je izraz: $(16^5 + 2^{15})$ djeljiv sa 33.
7. Odrediti najveći petocifreni broj čije prve tri cifre predstavljaju kvadrat, a poslednje tri cifre kub prirodnog broja.
8. Srediti izraz: P = (5A + 4B) − (3A + B − (C − A − 4B)), ako je A = $5y^2 - 11xy + 3x^2$, B = $5x^2 - 8xy - 2y^2$, C = $11x^2 + 3xy - 6y^2$, a zatim izračunati brojevnu vrijednost za $x = -0{,}2$ i $y = 0{,}8$.
9. Ako je n prirodan broj, izračunati:

a) $\frac{9^{n+1} \cdot 27^n \cdot (3^{n+2})^3}{(81^{n+1})^2}$; b) $4 \cdot 0{,}5^{n-5} \cdot 12 \cdot (\frac{1}{2})^{8-n}$.

10. Srediti izraz P, a zatim mu odredi brojevnu vrijednost za date vrijednosti promjenljive:

$$P = \frac{5}{4}m^2 - 3(m-n)(m+n) + \frac{(m+n)^2}{4} - \frac{14n^2-5m^2}{4},$$

za $m = \frac{46}{15}$ i $n = 7{,}5$.

11. Dokazati da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja djeljiva sa 8.
12. Rastaviti na činioce:
$(x-1)(x-2)(x-3) + ((x-1)(x-2) - (x-1))$.

Jovana Krstajić, OŠ "Radojica Perović", Podgorica

IX razred

I nivo

1. Površina kocke je $1350\ \text{cm}^2$. Kolike su dužine ivice i dijagonale date kocke?

2. Prostorna dijagonala kvadra ima dužinu $97cm$, a osnovne ivice su $a = 6$ cm i $b = 25$ cm. Kolika je visina i površina kvadra?
3. Dijagonala osnove pravilne četvorostrane prizme iznosi 5cm, a dijagonala prizme ima dužinu $12cm$. Izračunti površinu prizme.
4. Dužina osnovne ivice pravilne šestostrane prizme iznosi $a = 8$ cm, a dužina njene visine je $H = 10$ cm. Ako se svaka ivica prizme poveća 20%, kolika je razlika površina ovih prizmi?
5. Visina jednakostraničnog trougla je linearna funkcija stranice a, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $a > 0$.
   Odrediti: a) $h(3)$; b) $h(\sqrt{3})$.

6. Ako je $f(x) = \frac{3x+1}{x(x+2)}$ izračunati: a) $f(-2)$; b) $f\left(\frac{1}{3}x\right)$.
7. Grafiku linearne funkcije $y = kx + n$ pripadaju tačke $C(-\frac{2}{3}, 0)$ i $D(0, \frac{3}{4})$. Odrediti vrijednost za k i n.
8. Odrediti dužinu odsječka AB na pravoj $y = -x + 1$, ako tačka A ima koordinate $A(3, y)$, a tačka $B(x, 2)$.
9. Nacrtati grafik funkcije $y = -3x + \frac{3}{4}$ i pomoću njega odrediti vrijednost promjenljive x za koju je funkcija y ima vrijednost nula.
10. Odrediti vrijednost parametra m za koje će funkcija $y = \left(2m - \frac{1}{4}\right)x + 7$ biti opadajuća.

II nivo

1. Dužina osnovne ivice pravilne četvorostrane prizme je a. Ako je površina bočne strane dva puta veća od površine njene osnove izračunati površinu prizme.
2. Osnovna ivica pravilne trostrane prizme ima dužinu $a = 5cm$, a dužina visine prizme $H = 3h$, gdje je h visina osnove prizme. Izračunati površinu prizme.
3. Baza prizme je romb čija je stranica $a = 16\ cm$, a jedan njegov ugao 60°. Kolika je površina prizme, ako je njena visna jednaka visini baze prizme?

4. Greda dužine $8m$ ima poprečni presjek u obliku pravougaonika čije su dužine stranica $14cm$ i $12cm$ sječena je po dijagonalnom presjeku. Izračunati površinu jedne tako dobijene grede.
5. Rješenje jednačine $2x-\left(\frac{x}{2}-\frac{3+x}{4}\right)=3-\frac{1}{2}\left(1-\frac{6-x}{3}\right)$ je dužina visine jednakokrakog trapeza čije su osnovice $13cm$ i $15cm$. Trapez je osnova prave prizme čija je dužina visine jednaka aritmetičkoj sredini osnovnih ivica. Izračunati:

   a) površinu prizme

   b) površinu dijagonalnog presjeka prizme.

6. Funkcije su date formulama:

   a) $y=2x-7$; b) $y=\sqrt{3}-\sqrt{5}$; c) $y=x(2-3x)$;

   d) $y=\frac{3(x+1)}{4}$; e) $y=\frac{2x-4}{x}$.

   Koja od ovih funkcija je linearna? Odrediti n i k za te linearne funkcije.

7. Vrijednost promjenjive $x=-\frac{1}{3}$ je nula funkcije $y=3x+b$. Odrediti vrijednost parametra b, pa za tako dobijenu vrijednost nacrtati grafik funkcije.
8. Grafik funkcije $ax+by+c=0$ prolazi kroz tačku $M(-2,-1)$ i paralelan je sa grafikom funkcije $2x+3y+9=0$. Odrediti parametre a, b, c a zatim nacrtati grafik dobijene funkcije.
9. Nacrtati grafik funkcije a) $y=\frac{2}{3}x-3$; b) $y=-\frac{1}{2}x+2$ i pomoću njega odrediti vrijednost promjenljive x za koje je :

   $$y=0;\qquad y<0;\qquad y>0.$$

10. U magacinu se nalazi $40t$ jabuka. Svkog dana se u prodavnice odveze po $5t$. Napisati formulu funkcije kojom je izražena količina tona y jabuka koje ostaju u magacinu poslije x dana i nacrtati grafik te funkcije.

Mirjana Bošković, OŠ "Radojica Perović", Podgorica

PRIPREMA ZA NASTAVNIKE

Nastavni predmet	Matematika
Razred	VI
Nastavna jedinica	Razlomci. Razlomak kao dio cjeline
Tip časa	Obrada
Ishodi časa	Tokom časa učenici će: – usvojiti pojam razlomka i njegovo značenje – uvježbati zapisivanje razlomaka; razlikovati brojilac od imenioca – uvježbati primjenu razlomaka na pojedine životne situacije
Oblici rada	frontalni, individualni, rad u paru
Nastavne metode	dijaloška; monološka
Tehnike razvoja kritičkog mišljenja	Brainstorming; znam, želim da znam, naučio sam; „debata“

Tok časa

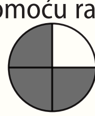
I) Evokacija (5 minuta)

Na tabli će biti nacrtana tabela sa dvije kolone

Znam	Želim da znam

U uvodnom dijelu časa učenici će se metodom braimstominga podsjetiti na pojam razlomka o kojem posjeduju određena znanja iz prethodnih razreda. Asocijacije zapisuju u sveskama, a potom ih saopštavaju nastavniku, koji pojedina njihova zapažanja zapisuje u koloni „znam“. Nakon toga, učenici saopštavaju šta bi željeli da znaju o razlomcima, što nastavnik upisuje u kolonu „želim da znam“. Piše naslov lekcije na tabli.

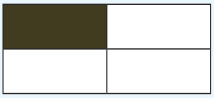
II) U sledećih dvadeset pet minuta učenici čitaju tekst sa radnog listića o razlomcima. Tekst je organizovan u tabeli sa četiri kolone, pri čemu je u prvoj upisan tekst o razlomcima sa odgovarajućim primjerima. Druga, treća i četvrta kolona su predviđene da u njima učenici štrikiraju ono što znaju, žele da znaju ili su naučili tokom časa.

	Znam	Želim da znam	Naučio sam
Skup prirodnih brojeva se označava sa **N**, i zapisuje se **N= {1,2,3,4,5,...}**. Pomoću prirodnih brojeva možemo da odredimo broj elemenata nekog skupa. Npr., da utvrdimo koliko je osoba u prostoriji, da prebrojimo olovke u futroli, koliko je knjiga na polici, itd.			
Međutim, ako tri druga dijele jednu čokoladu, tada te djelove ne možemo da opišemo prirodnim brojevima. Za takva „prebrojavanja" nam trebaju novi brojevi.			
Brojevi kojima prikazujemo djelove cijelog se nazivaju razlomci. Oni se zapisuju na sledeći način: $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{1}{6}, \frac{4}{5}$ i tako dalje.			
1. Ako je čokolada podijeljena na dva jednaka dijela, a Uroš dobio jedan od ta dva dijela, onda to zapisujemo pomoću razlomka $\frac{1}{2}$ i čitamo: jedna polovina. 			
2. Na rođendanskom slavlju je torta bila podijeljena na 4 dijela. Djeca su pojela tri dijela. Pomoću razlomka to zapisujemo sa $\frac{3}{4}$ i čitamo: tri četvrtine 			
3. Dužina duži je 10 cm. Jedan centimetar je deseti dio od čitave duži, a razlomkom se zapisuje $\frac{1}{10}$.			
Brojevi oblika $\frac{a}{b}$, pri čemu su a i b prirodni brojevi se nazivaju RAZLOMCI. Broj a se naziva brojilac, broj b imenilac, a vodoravna crta se naziva razlomačka crta. Imenilac imenuje na koliko djelova je cijelo podijeljeno, a brojilac govori koliko djelova od cijelog je uzeto. Zapišite u koloni **znam** nekoliko razlomaka!			
U svakom cijelom postoje dvije polovine, tri trećine, četiri četvrtine, pet petina ...Dakle, $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}\ldots$			
Svaki prirodan broj se može zapisati u obliku razlomka sa imeniocem 1. $n=\frac{n}{1}$. Na primjer, $3=\frac{3}{1}, 7=\frac{7}{1}, 24=\frac{24}{1}$, i tako dalje.			

Tokom čitanja ovog materijala učenici razmjenjuju informacije sa drugom iz klupe, diskutuju o poznatim i nepoznatim pojmovima i postavljaju pitanja nastavniku. Po potrebi, nastavnik na tabli crta slike iz primjera 1, 2 i 3, i pojašnjava nejasne pojmove.

III) Nakon toga učenici će dobiti tri zadatka koja rešavaju u paru (10 minuta):

1) Izrazi razlomkom obojeni dio slike i zapiši riječima

a)  b)  c) 

2) Dat je skup razlomaka {2/3, 1/2, 3/4, 7/11, 9/15, 102/351}. Odrediti skup A čiji su elementi imenioci, i skup B čiji su elementi brojioci datih razlomaka.

3) Brojeve 5,12, 34, 55 i 231 napisati u obliku razlomka sa imeniocem 1.

IV) Na kraju, učenici kroz„debatu" iznose svoja zapažanja o toku i organizaciji časa, kao i šta su znali, a šta naučili na času. Nastavnik zadaje domaći zadatak!

Radomir Božović, OŠ „Radojica Perović" Podgorica

ODABRANI ZADACI

Odabrani zadaci su namijenjeni učenicima koji redovno prate nastavu matematike i odgovaraju zadacima iz nivoa „C" ili „crvenim" zadacima iz školskih zbirki zadataka. Oni su prelazni korak od zadataka sa redovne nastave ka takmičarskim zadacima. Mogu da se rješavaju samostalno, ali i na matematičkoj sekciji.

VI razred

1) Na pravoj p su date tačke: T, A, B, C, D i S, tako da je $AB = BC = CD$. Rastojanje između središta duži AB i CD iznosi 28 cm, a rastojanje između središta duži TA i DS je 52 cm. Kolika je dužina duži TS?

2) Zbir dva prirodna broja je 512, a njihov NZD je 64. Koji su to brojevi?

3) Odrediti razlomak čiji je imenilac 12, a koji je veći od $\frac{3}{4}$ i manji od $\frac{7}{8}$.

4) Šta je veće: $\frac{2017}{2018}$ ili $\frac{2018}{2019}$?

VII razred

1) U mjesecu februaru jedne godine tri četvrtka su bili neparnog datuma. Dokazati da je ta godina bila prestupna. Koji dan je bio 10. mart te godine?

2) Za koje vrijednosti cijelog broja x je razlomak $\frac{x+6}{6}$ takođe cio broj?

3) U pravouglom trouglu ABC na hipotenuzi AB su date tačke P i Q takve da je AP = PC i BQ = BC. Dokazati da je $\sphericalangle PCQ = 45°$.

4) U ravni je dato 7 pravih od kojih nikoje dvije nijesu paralelne. Dokazati da među njima postoje barem dvije prave koje se sijeku pod uglom manjim od 26°. Da li je tačno tvrđenje ako se umjesto 26° uzme 25°?

VIII razred

1) Jedna knjiga je od druge skuplja za 30%. Za koliko procenata je druga druga knjiga jeftinija od prve?

2) Odrediti najmanji prirodan broj koji pomnožen sa 5880 daje:
a) kvadrat; b) kub prirodnog broja.

3) Dokazati da za svaki prirodan broj n važi: $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n}$.

4) Dokazati da za svako $a \in Z$ važi: a) $6 \mid (a^3 - a)$; b) $5 \mid (a^5 - a)$.

IX razred

1) Dokazati da prost broj pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 1 ili 5!

2) Nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$.

3) Ako se broj stranica konveksnog mnogougla poveća za 5, tada se broj dijagonala poveća za 45. Koliko stranica ima početni mnogougao?

4) Izračunati površinu kocke ako je jedno njeno tjeme udaljeno 7 cm od dijagonale.

NASLOVNA STRANA

1) Sva slova iz riječi **KOKA**, **KOLA** i **VODA** zamijeniti po jednom cifrom tako da jednakost bude tačna.

2) Kako se pomoću cifara 0, 1, 2, ..., 9 (svaku iskoristiti po jednom) i računskih operacija može dobiti broj 2019?

Rješenja zadataka sa naslovne strane nam šaljite na mail redakcije. Imena prvih 5 učenika, za oba zadatka posebno, koji pošalju tačna rješenja, će biti objavljena u sljedećem broju.

Srećna Nova 2019. godina

KONKURSNI ZADACI

Ovi zadaci su namijenjeni za samostalni rad učenika koji pokazuju veće interesovanje za matematiku, a mogu da se rade na časovima dodatne nastave. Mogu da posluže kao priprema za takmičenja.

VI razred

1. Tri druga su zajedno imala 36 eura. Odlučili su da kupe loptu, pa je prvi dao 6, drugi 8 a treći 4 eura. Ispostavilo se da su im poslije kupovine ostale jednake sume novca. Koliko je novca imao svaki od drugova prije kupovine lopte?

2. Šta je veće: $\frac{3{*}5{*}}{36}$ ili $\frac{5{*}3{*}}{45}$, ako umjesto zvjezdica mogu da stoje bilo koje cifre?

VII razred

1. Bazen može da se napuni iz cijevi A za 40 sati. Cijev B je većeg otvora, pa se pod istim uslovima bazen kroz nju puni za upola kraće vrijeme. Za koliko vremena će se napuniti taj bazen ako se istovremeno otvore obje cijevi i ako se kroz cijev B zbog većeg pritiska uliva vode za $\frac{1}{6}$ više od predviđene količine?

2. Koliko sati pokazuje časovnik ako se zna da su se kazaljke poklopile i da se nalaze između 7 i 8 sati?

VIII razred

1. a) Polinom $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ rastaviti na proste činioce;
   b) Dokazati da je dati polinom djeljiv sa 8 za svako neparno x.

2. Odrediti sva cjelobrojna rješenja jednačine $x^2 = y^2 + 2017$.

IX razred

1. Odrediti sva cjelobrojna rješenja jednačine $3x + 7y = 89$.

2. Naći $f(x)$ ako je $f(x-1) = 4x - f(2) - 2$.

Hidajeta Lukač, OŠ „Dušan Korać“, Bijelo Polje

RJEŠENJA KONKURSNIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

1. Na rođendanskoj žurci je bilo 26 dječaka i djevojčica. Svaki dječak je plesao sa različitim brojem djevojčica. Prvi dječak je plesao sa tri djevojčice, drugi sa četiri, treći sa pet, i tako redom sve do poslednjeg dječaka koji je plesao sa svakom djevojčicom. Koliko je djevojčica, a koliko dječaka bilo na toj žurci?
2. Tri kruške teže koliko četiri jabuke, a četiri kruške koliko 5 banana. Ako 8 jabuka košta koliko 7 banana, šta je skuplje: kilogram jabuka ili kilogram banana?

Rješenja:

VI-1. Pretpostavimo da je bilo n dječaka. Po uslovu zadatka, poslednji, n-ti dječak je plesao sa svakom djevojčicom, a njih je bilo n + 2, jer je n-ti dječak plesao sa n + 2 djevojčice. Iz jednačine n + (n + 2) = 26 dobijamo da je n = 12, što znači da je dječaka bilo 12, a djevojčica 14.

VI-2. Ako 3 kruške teže koliko 4 jabuke, onda 12 krušaka teži koliko 16 jabuka. Slično, iz drugog uslova dobijamo da 12 krušaka teži koliko 15 banana. Iz ova dva uslova dobijamo da 16 jabuka teži koliko 15 banana. Iz trećeg uslova zadatka dobijamo da 16 jabuka košta koliko 14 banana. Slijedi da je kilogram banana skuplji od kilograma jabuka.

VII razred

1. Na prvenstvu Crne Gore u šahu je učestvovalo 84 takmičara. Dokazati da se među njima može pronaći 10 takmičara tako da su svi iz različitih gradova, ili su svi iz iz istog grada.
2. Dat je broj $\overline{a10bcd}$, pri čemu su cifre *a, b, c* i *d* različiti prosti brojevi. Odrediti sve brojeve ovog oblika koji su djeljivi sa 275.

Rješenja:

VII-1. Najnepovoljnija situacija je da imamo 9 gradova sa po 9 učenika. Tada ne bi mogli naći 10 učenika iz različitih gradova, niti 10 učenika iz istog grada. No, kako je $9 \cdot 9 = 81 < 84$, to preostala tri takmičara moraju biti iz jednog od 9 gradova, ili iz novog, desetog grada. Dakle, ili imamo 10 učenika iz različitih gradova, ili su svih 10 iz istog grada.

VII-2. Kako je $275 = 11 \cdot 25$, to traženi broj mora biti djeljiv sa 25 i sa 11. Iz uslova da mora biti djeljiv sa 25, zaključujemo da će poslednje dvije cifre u njegovom zapisu biti 00, 25, 50 ili 75. Kako su a, b, c i d različiti prosti brojevi, jedine opcije su 25 i 75. Dakle, $d = 5$. Za c imamo dvije mogućnosti. Ako je $c = 2$, tada naš broj ima oblik $\overline{a10b25}$, i mora biti djeljiv sa 11. Primjenjujući kriterijum djeljivosti brojem 11 da je razlika između zbira cifara na parnim mjestima i zbira cifara na neparnim mjestima djeljiva sa 11 imamo (a + 0 + 2) – (1 + b + 5) djeljivo s 11. Ovo može samo u slučaju da je a + 2 = b + 6, a ovo samo u slučaju da je a = 7 i b = 3. Traženi broj je 710325. Ako je c = 7, slično rezonujući dobijamo da je a = 2 i b = 3, a traženi broj je 310375.

VIII razred

1. Odrediti sve prirodne dvocifrene brojeve koji su rješenja jednačine: $xy - 2x + y = 2018$.
2. Ako je izraz $a^2 + 11ab + b^2$ djeljiv sa 13, dokazati da je izraz $a^2 - b^2$ takođe djeljiv sa 13.

Rješenja:

VIII-1. Jednačinu $xy - 2x + y = 2018$ možemo transformisati:

$xy - 2x + y -2 = 2016$

$x(y -2) + (y - 2) = 2016$

$(x + 1)(y - 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Parovi $(x + 1, y - 2)$ mogu biti (21, 96), (24, 84), (28, 72), (32, 63), (36, 56) i (42, 48). Odavde dobijamo sve parove (x, y) dvocifrenih prirodnih brojeva koji su rješenja date jednačine: (20, 98), (23, 86), (27, 74), (31, 65), (35, 58), (43, 50).

Kako važi zakon komutativnosti, tj, $(y - 2)(x + 1) = 2016$, to su rješenja i parovi: (95, 23), (83, 26), (71, 30), (62, 34), (55, 38) i (47, 44).

VIII-2. Dati polinom možemo transformisati na sljedeći način:

$a^2 + 11ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 13ab = (a - b)^2 + 13ab$.

Odavde zaključujemo da je izraz $(a - b)^2$ djeljiv sa 13.

Zato je i $(a - b)$ djeljivo sa 13, tj $a - b = 13k$. Sada dobijamo da je

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 13k(a + b) = 13p$, pa je $a^2 - b^2$ djeljivo sa 13.

IX razred

1. Koliko postoji uređenih parova trocifrenih prirodnih brojeva koji su rješenja jednačine:

$$3x + 4y + 2 = 2018?$$

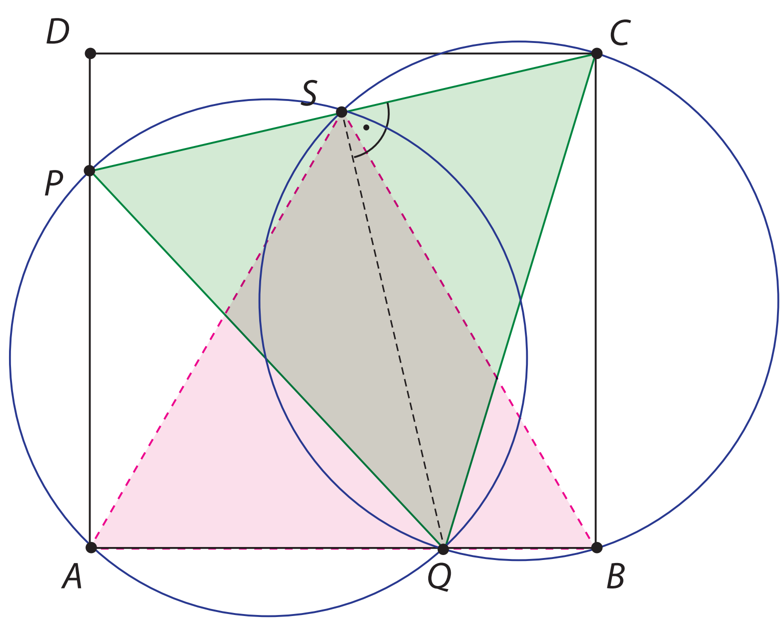
2. Na stranicama AD i AB pravougaonika ABCD su redom date tačke P i Q tako da je trougao CPQ jednakostraničan. Ako je tačka S sredina stranice CP dokazati da je trougao ABS jednakostraničan.

Rješenja:

IX-1. Jednačinu $3x + 4y + 2 = 2018$ možemo zapisati kao $3x + 4y = 2016$. Odavde zaključujemo da je x paran, $x = 2m$. Kako je 2016 djeljivo sa 3, to y mora biti djeljivo sa 3, pa imamo $y = 3k$. Uvrstimo li $x = 2m$ i $y = 3k$ u prethodnu jednačinu, dobićemo $6m + 12k = 2016$. Dijeleći poslednju jednačinu sa 6 dobijamo $m + 2k = 336$.

Za trocifrene brojeve x i y važi $100 \leq x \leq 999$, i $100 \leq y \leq 999$, a kako je $x = 2m$ i $y = 3k$, dobijamo $50 \leq m$ i $33 \leq k$. Iz sistema $336 - 2k = m$ i $50 \leq m$ dobijamo da je $336 - 2k \geq 50$, pa je $k \leq 143$. Slijedi da je $33 \leq k \leq 143$, pa traženih parova ima 111.

Rješenje za ovaj zadatak nam je poslala učenica Arianna Argirova, IX-2 JU OŠ „Anto Đedović“ iz Bara, na čemu joj zahvaljujemo, i kao nagradu za njen trud šaljemo besplatan primjerak drugog broja Dijagonale!



IX-2. Tačka S je središte stranice CP jednakostraničnog trougla CPQ, pa je i podnožje visine iz tačke Q na stranicu CP. To znači da je ugao CSQ prav. Kako je i ugao CBQ prav, to zaključujemo da tačke C, S, B i Q pripadaju jednom krugu sa prečnikom CQ (uglovi nad prečnikom CQ su pravi). Tada je $\sphericalangle SCQ = \sphericalangle SBQ = 60°$, jer su to uglovi nad istim kružnim lukom SQ. Slično prethodnom možemo zaključiti da je $\sphericalangle SAQ = \sphericalangle SPQ = 60°$. Dakle, trougao ASB je jednakostraničan jer su mu uglovi po 60°.

Dr Vladimir Drekalović

O PISA TESTIRANJU IZ OBLASTI MATEMATIKE

Posljednjih nekoliko godina u javnosti se često pominje takozvano PISA testiranje. U šturim izvještajima iz medija saznajemo da na tom testiranju naši đaci ne postižu zapažene rezultate. Međutim, iz takvih izvještaja ne saznajemo mnogo detalja koji se odnose na samo testiranje. Ovim tekstom ćemo pokušati baciti barem malo više svjetla na PISA test i detalje koji se odnose na njega. U tom smjeru, pomenimo nekoliko podataka koji se odnose na ovaj test.

Krenimo prvo od imena. Pisa je skraćenica za engleski naziv *Programme for International Student Assessment* što bismo mogli prevesti kao *Program međunarodnog vrednovanja* učenika. Drugim riječima, testom se ocjenjuje znanje đaka na međunarodnom nivou, to jest, znanje đaka iz više zemalja. Iako se ovo testiranje najčešće povezuje sa obrazovanjem i oblašću prosvjete njega, ipak, ne organizuje nikakva prosvjetna već, pomalo iznenađujuće, jedna ekonomska organizacija. Riječ je o Organizaciji za ekonomsku saradnju i razvoj (OECD).[1] PISA testiranje se, međutim, ne organizuje samo u zemljama koje su članice organizacije OECD već u svim svjetskim zemljama čije su vlade izrazile želju da na takav način testiraju vlastite đake, kao što je slučaj i sa Crnom Gorom. PISA testiranjem se ocjenjuju đaci koji imaju 15 godina, a testiraju se iz 3 oblasti: matematika, nauka i čitalačka pismenost (*reading*). Cilj testiranja je ispitivanje praktične efikasnosti prosvjetnih sistema država sa ciljem da se dobiju odgovarajuće smjernice u vezi sa budućom obrazovnom politikom. Testiranje je prvi put organizovano 2000. godine i od tada se organizuje svake treće godine. Posljednje testiranje je organizovano ove godine, ali budući da se na rezultate čeka dugo, 1-2 godine, danas raspolažemo tek sa rezultatima testiranja koje je organizovano 2015. godine. Generalno govoreći, do sada najbolje rezultate na ovom testiranju postižu pojedine istočnoazijske i evropske zemlje Singapur, Kina, Tajvan, Japan, Južna Koreja, Lihtenštajn, Švajcarska, Finska, Holandija, Estonija, Poljska i Kanada.

Crna Gora na ovom međunarodnom testiranju učenika učestvuje od 2006. godine. Kada je u pitanju matematika rezultati su sljedeći: crnogorski đaci su 2006. godine zauzeli 46 mjesto (od ukupno 52 zemlje), 2009. godine su zau-

1 OECD je ekonomska organizacija koja je osnovana 1961. godine sa ciljem unapređenja ekonomskih tokova i komunikacija. Danas ova organizacija broji 36 država članica među kojima su i najrazvijenije svjetske zemlje kao što su SAD, Japan, Švedska, Njemačka, Australija, itd.

zeli 49. mjesto (od ukupno 57 zemalja), 2012. godine su zauzeli 51. mjesto (od ukupno 61 zemlje) i konačno 2015. godine su zauzeli 54. mjesto (od ukupno 73 zemlje) što znači da se rezultat nije mnogo mijenjao uzimajući u obzir ukupan broj zemalja učesnica testiranja.

Ideja PISA testiranja je zasnovana na jednom pragmatičnom stanovištu koje se odnosi na pitanje znanja – znanje koje stičemo ima svrhu tek ako je praktično primjenljivo. Iako se o ovom gledištu može široko raspravljati mi to nećemo učiniti, jer nam je cilj tek da predstavimo ovaj test. Dakle, čitavo testiranje u svakoj od tri oblasti, pa i u matematici, je organizovano tako da se od učenika očekuje, između ostalog, praktična primjena stečenog znanja, rezonovanje, odvajanje bitnih od nebitnih detalja. Od učenika se ne očekuje memorisanje bilo kakvih formula iz matematike, fizike, hemije i slično, čak je dozvoljeno i korišćenje digitrona. Iz šarenila svih zadataka koji se na ovom testiranju pojavljuju pokušaćemo izdvojiti jednu grubu tipizaciju zadataka, to jest, naznačićemo nekoliko tipova zadataka čije se različite verzije pojavljuju na testiranjima.

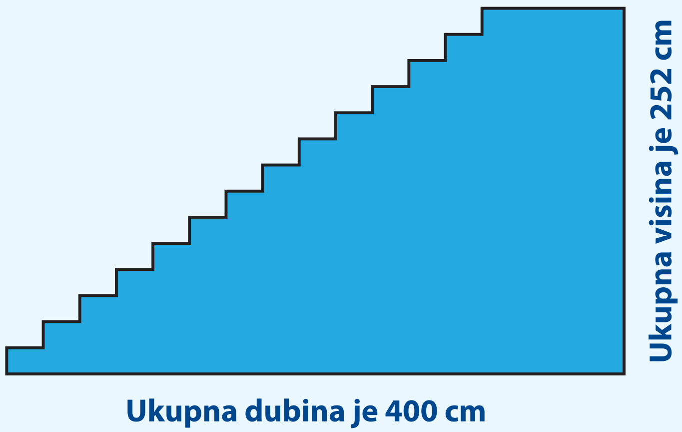
Popločavanje, zidanje, krečenje

Živko želi popločati pravougaono dvorište njegove nove kuće. Dvorište je dugo 5.25 metara, a široko 4.00 metara. Potrebna mu je 81 pločica za jedan kvadratni metar. Izračunati koliko je pločica potrebno Živku kako bi popločao čitavo dvorište.

Ovakvi tipovi zadataka nisu iznenađenje za naše učenike. Pojavljuju se i u udžbenicima mlađih razreda osnovne škole. U konkretnom slučaju potrebno je izračunati površinu čitavog dvorišta (površinu pravougaonika), a zatim traženi broj pločica dobijamo kao proizvod te površine i broja pločica koje su potrebne za jedan kvadratni metar površine.

Podatak viška

Dijagram ilustruje 14 stepenica koje su ukupno visoke 252 centimetra, a ukupno duboke 400 centimetara. Odrediti visinu svake od 14 stepenica.



Sa ovakvim tipom zadataka naši učenici, kao i nastavnici, nemaju često priliku da se sretnu i za njih je on veliko iznenađenje. Na njih smo mogli naići samo ako se u formulaciji zadatka pojavila slučajna greška. Naime, radi se o zadacima u kojima je neki od podataka suvišan, tj. nepotreban za rješenje zadatka. U životu nailazimo upravo na takve situacije. Kada rješavamo konkretne probleme uz pomoć matematike nemamo situacije u kojima imamo samo podatke koji su potrebni za rješenje našeg problema već mnoge druge podatke koji su za rješenje problema nebitni. U našem slučaju suvišan je podatak o „dubini" stepeništa. Dakle, visina jedne stepenice se dobija tako što visinu čitavog stepeništa podijelimo brojem stepenica. Podatak o „dubini" ne koristimo u rješavanju.

Približna procjena

Svemirska stanica Mir je provela u orbiti 15 godina i za to vrijeme obišla Zemlju oko 86500 puta. Najduži boravak jednog kosmonauta u Mir-u je bio oko 680 dana. Približno, koliko puta je ovaj kosmonaut obišao Zemlju?

a) 110,

b) 1 100,

c) 11 000,

d) 110 000.

Ovaj tip zadataka je takođe novina za naš obrazovni sistem. U kom smislu? Nije lako u udžbenicima matematike koji su se izdavali ili se sada izdaju na prostorima bivše Jugoslavije, dakle i u Crnoj Gori, naići na zadatke u kojima se traži *približna procjena* određene veličine. Naučeni smo da matematika uvijek odražava egzaktnost, preciznost u svakom smislu i računanje bez ikakvih približnih nepreciznosti. Ovaj zadatak ruši takav mit o matematici i istovremeno ilustruje njenu stvarnu i čestu primjenu u svakodnevnom životu. Jedan mogući način rješavanja gornjeg zadatka je sljedeći: izračunati približno koliko puta u toku jedne godine Mir obiđe Zemlju (86500:15≈5767), a zatim vidjeti koliko je to približno za dvije godine (≈5767·2=11533), te uporediti taj broj sa ponuđenim rješenjima. Otuda zaključujemo da je traženo rješenje pod c).

Zadaci za vježbu:

1) Hodnik je dug 3 m 20 cm, a širok 2 m 40 cm i treba ga obložiti pločicama.

a) Kolika m^2 pločica je potrebno za popločavanje tog hodnika (dodaje se još jedan m^2 zbog otpada)?; b) Koliko pravougaonih pločica dimenzije 40 cm sa 25 cm staje u jednom m^2?; d) Ako se odlučimo da popločavanje izvršimo kvadratnim pločicama čija je dimenzija 33 cm, koliko će takvih pločica biti potrebno? e) Koliko će koštati popločavanje pravougaonim pločicama ako njihov kvadrat košta 9 eura, a majstor za svoj rad naplaćuje 8 eura po metru kvadratnom?

2) Porodica Bojović je odlučila da renovira dječiju sobu za Mladena i Veska. Kupljen je novi krevet na sprat koji je koštao 385 eura i monitor za kompjuter sa tastaturom i mišom od 122 eura. Soba je okrečena novim bojama, što je koštalo 230 eura. Radni sto je ostao stari, dok su odlučili da američki ormar rade po mjeri. Koliko će se platiti za ormar ako mu je dužina 2m, širina (dubina) 80 cm, a visina 2m 40 cm, i ako majstor naplaćuje 40 eura po metru kvadratnom ukupne površine ormara?

3) Tokom I svjetskog rata francuska podmornica je potopila austrijski ratni brod „Princ Eugen“, na kome se nalazilo 84 člana posade. Osim dva mornara svi ostali su stradali. Brod se nalazi u Jonskom moru na dubini od 12310 cm. Zaokruži približnu dubinu na kojoj se brod nalazi izraženo u metrima:

a) 1200 m; b) 120 m; c) 12 m.

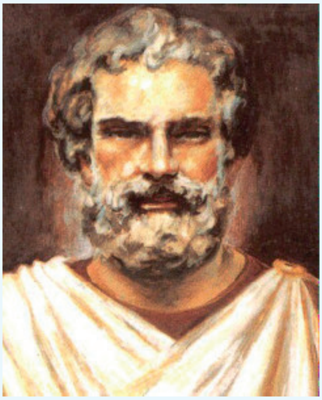
Nastavak u sljedećem broju.

Danijela Jovanović

TALES – PRVI MATEMATIČAR STARE GRČKE

Tales iz Mileta (rođen oko 624. p. n. e., umro oko 547. ili 546. p. n. e.) je po mišljenju mnogih prvi grčki filozof i jedini koji je prije Sokrata uvršten među sedam antičkih mudraca. No, isto tako on je bio naučnik, prije svega matematičar, državnik, a i vrstan inžinjer. Nažalost, nije sačuvano ništa od njegovih pisanih djela, jer su ona bila izgubljena već u Aristotelovo doba.

Kako nema pisanih tragova o njegovim otkrićima, jako je teško odrediti čime se sve bavio i do kakvih je zaključaka došao. Na sreću, mnogi grčki filozofi su ostavili traga o Talesu i njegovom radu, pa na osnovu toga možemo govoriti o veoma interesantnim Talesovim otkrićima. Aristotel, na primjer, navodi kako je Tales zaključio da će jedne godine masline u Grčkoj dobro roditi, nakon čega je zakupio sve prese za cijeđenje ulja iz maslina u kraju gdje je živio, potom ih izdavao po većoj cijeni i tako se obogatio, jer su seljaci nakon berbe maslina morali da ih cijede na njegovim presama. Platon navodi kako je jedne noći Tales pješačio posmatrajući nebo. Ne pazeći kuda ide, pao je u jarak. Jedna žena mu je pomogla da izađe iz jarka i rekla mu: „Kako očekuješ da ćeš razumjeti što se događa gore ne nebu kada ne vidiš ni šta ti je pod nogama?!“.



Smatra se da je Tales svojevremeno predvidio pomračenje sunca, što je u to vrijeme bilo jako teško. Našao je metodu kako izračunati udaljenost brodova od obale, a isto tako pomogao mornarima da prateći sazvežđa, lakše plove. Tales je smatrao da Zemlja ima oblik diska koji pluta na vodi, i da su zemljotresi posljedica toga što se Zemlja nalazi na vodi. Tales je tvorac prve kosmološke teorije, koja postanak svijeta objašnjava djelovanjem bogova. Vodu je smatrao pramaterijom, tačnije da je od nje nastao svijet i sve živo u njemu. U Miletu je osnovao filozofsku školu iz koje su izašli poznati filozofi Anaksimandar i Anaksimen.

Postoje zapisi o tome kako je Tales izračunao visinu piramide. Za vrijeme jednog sunčanog dana čekao je trenutak kada će njegova sjenka biti jednaka njegovoj visini. Iskoristio je štap kojeg je zabio u pijesak pored piramide i pomoću sjenke izračunao visinu piramide. Koristio je sličnost trouglova.

Tales je prvi dao logičke temelje dokazivanju teorema, a njegove metode rješavanja i postavljanja problema bile su potpuni noviteti za vrijeme u kojem je živio. Naime, on se nije bavio posmatranjem pojava, već i njihovim dokazivanjem. I upravo Talesova veličina je u tome što je bio prvi koji je sve pokušavao objasniti logičkim razmišljanjem.

Tales je naveo mnoga tvrđenja, koja je i dokazao, naročito u geometriji, koju je učio od Egipćana. Navodimo bez dokaza neke teoreme za koje istoričari matematike smatraju da su Talesova otkrića.

Teorema 1: Prečnik dijeli krug na dva jednaka dijela.

Teorema 2: Uglovi na osnovici jednakokrakog trougla su jednaki.

Teorema 3: Naspramni uglovi koje obrazuju 2 prave koje se sijeku su jednaki. (Riječ je o unakrsnim uglovima).

Teorema 4: Trougao je određen jednom stranicom i uglovima naleglim na nju. (Dva su trougla podudarna ako imaju jednaku po jednu stranicu i dva ugla na njoj. Stav podudarnosti USU.)

Teorema 5: Ugao nad prečnikom kružnice je prav.

Čuvena je i **Talesova teorema** koja kaže:

Ako su date dvije prave a i b koje se sijeku u tački O, prava p koja ih redom siječe u tačkama A i B i prava q koja ih siječe u tačkama C i D, tada su prave p i q paralelne ako i samo ako AB : CD = OA : OC = OB : OD.

Ovom teoremom i njenom primjenom više ćete se baviti u srednjoj školi.

Tales je poznat po tome što se smatra prvim Helenom koji je izlagao i dokazivao teoreme, pa se zato s pravom smatra ocem helenske matematike.

Za kraj ove priče evo i nekih interesantnih Talesovih izreka:

- *Ako zapovijedaš, upravljaj samim sobom.*
- *Ako je vladar jednom omražen, onda ga njegova bilo dobra, bilo loša djela, terete.*
- *Veće je poštovanje iz daljine.*
- *Najbrži je um, jer kroz sve juri.*
- *Šta je teško? Samoga sebe spoznati. A šta je lako? Drugome savjet davati.*

Tales je govorio da se smrt ne razlikuje od života. Kad mu je prigovoreno pa zašto onda ne umre, rekao je: *Baš zato što nema nikakve razlike*.

Na pitanje kako živjeti najbolje i najpravednije, ovaj pametni državnik je rekao: *Ako ne budemo radili ono što drugima prigovaramo.*

Čovjeku koji ga je pitao šta je bilo prije: noć ili dan, Tales je odgovorio: *Noć je za jedan dan starija.*

ZANIMLJIVA STRANA

Legenda o Šeherezadi i Šeherezadin broj

Mnogi od vas sigurno su čuli za legendu o lijepoj Šeherezadi, persijskoj kraljici. Legenda glasi da je Šeherezada, kći kraljevog savjetnika, uspjela da svojim pričama, koje je pričala zaredom 1001 noć, zainteresuje i zabavi kralja i time spase svoj život i život mnogih djevojaka koje bi kralj oženio na jednu noć, a ujutru pogubio. Mudra djevojka se dobrovoljno javila da na jednu noć postane kraljeva žena. Poslije večere Šeherezada je zamolila kralja da se oprosti sa svojom sestrom. Sestra je, uz dogovor sa Šeherezadom, zatražila da joj se ispriča bajka, što je Šeherezada i uradila. Kralj je bio oduševljen i tražio je još priča. Tako je Šeherezada 1001 noć pričala kralju po nekoliko bajki. U međuvremenu, kralj je zavolio Šeherezadu i naredio da se zapiše svaka bajka i priča koju bi ispričala. Tako je nastala zbirka priča „Hiljadu i jedna noć“. Upravo zbog toga, broj 1001 dobio je naziv Šeherezadin broj.

Ovaj broj je zanimljiv iz više razloga. Djeljiv je sa 3 uzastopna prosta broja: 7, 11 i 13. Tačnije, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Zanimljivo je i to da se proizvod bilo kog trocifrenog broja i broja 1001 dobija tako što se taj trocifeni broj napiše dva puta. Na primjer, $127 \cdot 1001 = 127127$.

Dokaz:

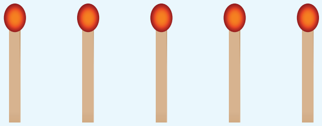
$$1001 \cdot \overline{abc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = \overline{abcabc}$$

Slično važi i za proizvod dvocifrenog broja sa 101, četvorocifrenog sa 10001 itd.

Hidajeta Lukač, škola „Dušan Korać“, Bijelo Polje.

Logički zadaci

1. Dato je 5 drvcadi šibice kao na slici. Kako dodati ovim drvcadima još pet, pa da se dobije tri?



2. Da li je moguće broj 66 povećati za svoju polovinu, ne koristeći nijednu od računskih operacija?
3. Časovnik svakog dana kasni 8 minuta. Ako je danas u 10 h pokazivao tačno vrijeme, kada će ponovo pokazivati tačno vrijeme?
4. Poznato je da četiri i jedna četvrtina patki za tri i jednu trećinu dana snesu dva i po jajeta. Koliko će jaja da snese jato od 34 patke?
5. Slavko, Toni i Siniša poznati su kao ljubitelji torte. Naime, svaki od njih može sam pojesti cijelu tortu. Slavku za to treba 2 sata, Toniju 3 sata, a Siniši šest sati. Za koliko sati će njih trojica zajedno pojesti cijelu tortu?

Sadržaj

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list:
članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale” će biti besplatno podijeljen svim nastavnicima matematike u osnovnim školama, kao i svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „Gradskoj knjižari" i „Narodnoj knjizi".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja.
Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Societe Generale Montenegro banke.
Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.
Mejl: udruznastmatem@gmail.com
www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851
9 772536 585009 >