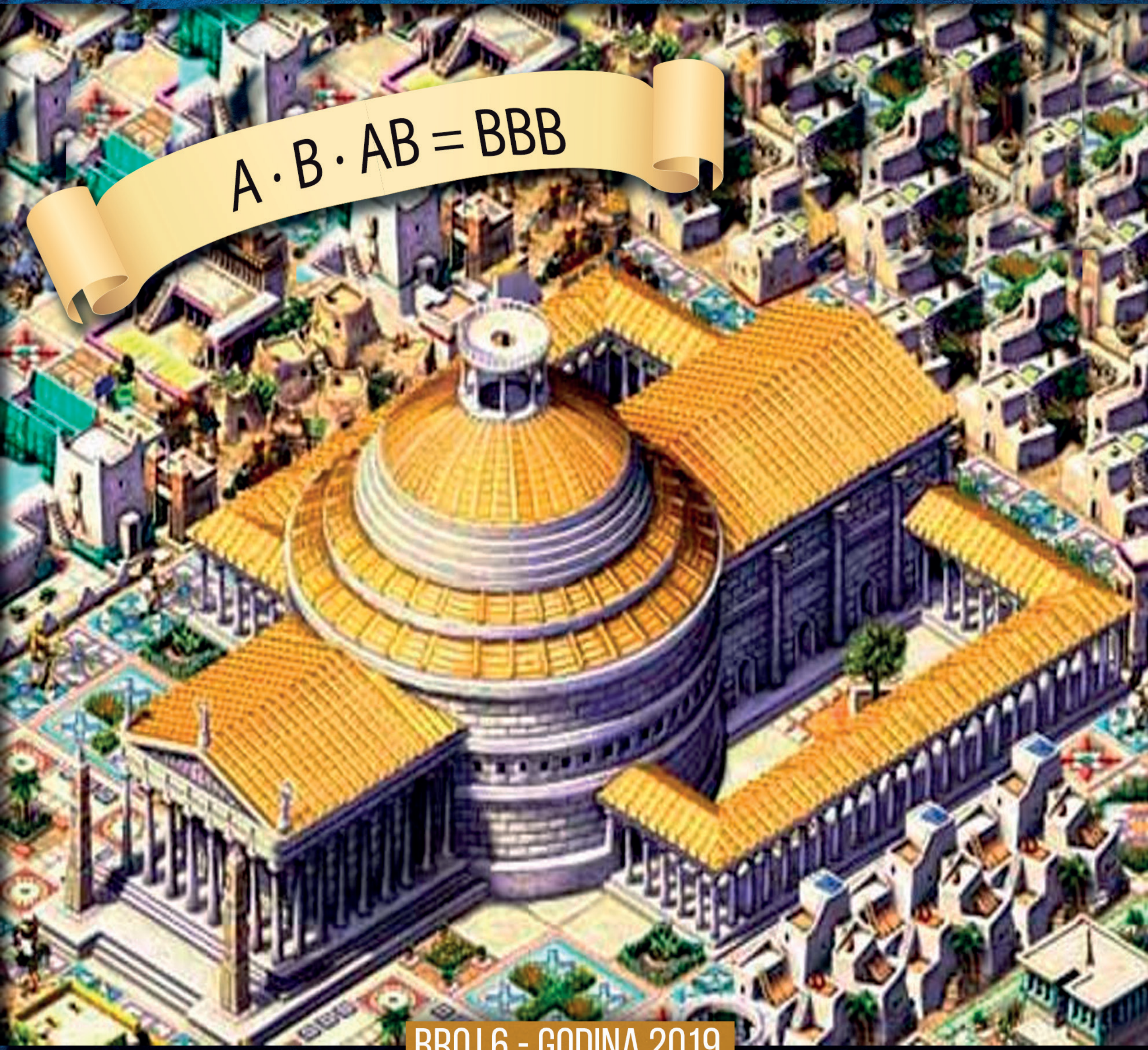
Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Dijagonala

Matematički list za učenike osnovnih škola Cijena 1,50 €



BROJ 6 - GODINA 2019.

Udruženje nastavnika matematike Crne Gore

Matematički list za učenike osnovnih škola – „**Dijagonala**", **broj 6**

Godina 2019. Cijena: 1,50 €

Glavni urednik:	*mr Radomir Božović*
Odgovorni urednik:	*Danijela Jovanović*
Redakcija:	*Prof. dr Žarko Pavićević, Prof. dr Radoje Šćepanović, Miodrag Lalić, Prof. dr Milenko Mosurović, Snežana Irić, Aleksandra Vuković, Vanja Đurđić Kuzmanović, Irena Pavićević, Nevena Ljujić*
Lektura:	*Milja Božović, prof.*
Korektura:	*Danijela Jovanović, prof.*
Priprema za štampu:	*Branko Gazdić*
Tiraž:	*1000*
Štampa:	*„Studio Branko" d.o.o. – Podgorica*

Zavod za školstvo je odlukom broj 01 – 1214/2 od 03.09.2018. godine preporučio časopis „Dijagonala" za korišćenje u osnovnim školama kao pomoćno nastavno sredstvo.

Sadržaj

Skup realnih brojeva **3**

Kontrolne naredbe - naredba switch **8**

Zadaci za vježbu **15**

Odabrani zadaci **22**

Konkursni zadaci **24**

Rješenja konkursnih zadataka iz prošlog broja **25**

Priprema za čas **28**

Euklid **31**

Zanimljivosti o brojevima **36**

Zanimljivi podaci **38**

Mr Radomir Božović

SKUP REALNIH BROJEVA

Sa skupom prirodnih brojeva učenici počinju da se upoznaju još od prvog razreda osnovne škole, da bi u petom razredu osnovne škole zaokružili taj skup **N** = $\{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$, i njegovo proširenje $\mathbf{N_0}$ sa još jednim elementom - nulom. Zbog nemogućnosti da se sve računske operacije izvode u skupu $\mathbf{N_0}$ (npr. $(5 - 9) \notin N$) to je ovaj skup proširen negativnim brojevima, pa smo dobili cijele brojeve: $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Ni ovaj skup nije zatvoren (jednačina ax = b nije uvijek rješiva u skupu Z) , te su matematičari i njega proširili skupom racionalnih brojeva $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \ i \ b \neq 0\right\}$. Međutim, neke elementarne matematičke probleme nije moguće riješiti u skupu **Q**.

Primjer 1: Površina kvadrata je 2 cm^2. Kolika je dužina stranice tog kvadrata?

Kako je $P = a^2$, to je $a^2 = 2$, pa je $a = \sqrt{2}$. Sada se postavlja pitanje: koji to racionalan broj pomnožen samim sobom daje 2? Rješenje zadatka leži u sledećoj teoremi:

Teorema 1: Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, odnosno da se može zapisati $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, pri čemu je razlomak $\frac{p}{q}$ neskrativ, odnosno da su p i q uzajamno prosti brojevi. U slučaju da je razlomak skrativ, možemo izvesti skraćivanje i dovesti ga do nesvodljivog razlomka. Kvadrirajući jednakost $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dobijamo $2 = (\frac{p}{q})^2$, odnosno $2 = \frac{p^2}{q^2}$, tj. $p^2 = 2q^2$. Iz ove jednakosti dobijamo da je p^2 paran broj, a onda je i p paran, tj. $p = 2k$, $k \in N$. Ako ovako izraženo p uvrstimo u prethodnu jednakost $p^2 = 2q^2$ dobijamo $4k^2 = 2q^2$, odnosno $q^2 = 2k^2$. Iz poslednje jednakosti, slično kao prije, zaključujemo da je i q paran broj, tj. $q = 2m$ ($m \in N$). Dobili smo da su p i q parni brojevi, pa je razlomak $\frac{p}{q}$ skrativ, što je suprotno polaznoj pretpostavci da je nesvodljiv, tj. da su p i q uzajamno prosti brojevi. Dakle, pretpostavka da je $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ dovodi do kontradikcije, pa zaključujemo da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Teorema je dokazana metodom kontradikcije, ili svođenjem na protivrječnost (reductio ad absurdum). Ovim postupkom se u početku dokaza pretpostavi suprotno od onoga što se dokazuje. Ako se na kraju dokaza, koristeći dozvoljene matematičke radnje i logička zaključivanja dođe do kontradikcije (do nekog neodrživog tvrđenja), znači da je početna pretpostavka neodrživa i time je dokaz gotov. Smatra se da je prethodna teorema prva u istoriji matematike koja je dokazana ovom metodom!

Brojevi koji nijesu racionalni se nazivaju iracionalni brojevi, a skup svih takvih brojeva se označava sa **I** i naziva skup iracionalnih brojeva. Brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ itd. su takođe iracionalni. Sledeća teorema govori da skup **I** ima beskonačno mnogo elemenata.

Teorema 2: Ako je a ∈ **Q**, tada je broj $(\sqrt{2} + a) \in$ **I.**

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $(\sqrt{2} + a)$ racionalan broj, koji se može zapisati u obliku:

$\sqrt{2} + a = \frac{p}{q}$. Tada je $\sqrt{2} = \frac{p}{q} - a$, što znači da je $\sqrt{2}$ racionalan broj (razlika dva racionalna broja je racionalan broj), a to nije tačno. Dakle, svi brojevi oblika $(\sqrt{2} + a)$ su iracionalni.

Primjer 2: Dokazati da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{13}$ iracionalan.

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2} + \sqrt{13} = r$, pri čemu je r ∈ **Q**. Iz prethodne jednakosti imamo $\sqrt{13} = r - \sqrt{2}$, pa kvadrirajući ovu jednakost dobijamo:

$\sqrt{13}^{\,2} = (r - \sqrt{2})^2 \Rightarrow 13 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r^2 - 11}{2r} \in$ **Q**, što dovodi do kontradikcije.

Postoje primjeri koji pokazuju da zbir dva iracionalna broja može biti racionalan broj. Slično je i za proizvod dva iracionalna broja. Pokušajte da nađete takve primjere.

Primjer 3: Ako je $x^2 + y^2 = 6xy$, $(x,y \in \mathbf{Z}^+)$, tada je $\frac{x+y}{x-y}$ iracionalan broj.

Rješenje: Kako je $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 8xy$, pa je $x + y = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$. Dalje je $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4xy$, pa je $x - y = 2\sqrt{xy}$. Sada imamo da je $\frac{x+y}{x-y} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}} = \sqrt{2} \in$ **I**, što je trebalo dokazati.

Unijom skupova **Q** i **I** dobija se skup realnih brojeva – **R**. Dakle, **R** = **Q** ∪ **I**. Skupovi **Q** i **I** su disjunktni (nemaju zajedničkih elemenata). Sa skupom realnih brojeva se zaokružuje priča o skupovima brojeva u osnovnoj školi. Međutim, skup realnih brojeva se u srednjoj školi i u kursevima više matematike uvodi drugačije, kao uređeno polje brojeva sa operacijama „+“ i „·“ i relacijom „≤“.

Definicija: Uređeno polje realnih brojeva je skup **R** sa operacijama sabiranja „ + “ i množenja „ · “ i relacijom „ ≤ “, i elementima 1 i 0, tako da za svako x, y, z ∈ **R** važe sledeća svojstva:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$, asocijativnost sabiranja;
2. $x + y = y + x$, komutativnost sabiranja;
3. $x + 0 = 0 + x$, postojanje neutralnog elementa kod sabiranja;
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$, postojanje suprotnog elementa (broja);
5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, asocijativnost množenja;
6. $x \cdot y = y \cdot x$, komutativnost množenja;
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x$, postojanje neutralnog elementa za množenje;
8. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, postojanje inverznog elementa;
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ i $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$, distributivnost množenja;
10. $x \leq y$ ili $y \leq x$, uporedivost dva elementa;
11. Ako je $x \leq y$ ili $y \leq x$ onda je $x = y$;
12. Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$ onda je $x \leq z$;
13. Ako je $x \leq y$ onda je $x + z \leq y + z$;
14. Ako je $0 \leq x$ i $0 \leq y$ onda je $0 \leq x \cdot y$;
15. Svaki neprazan, odozgo ograničen skup ima supremum.

Za svojstva od 1 do 15 iz prethodne definicije se kaže da su aksiome polja realnih brojeva **R**, a elementi tog polja se nazivaju realni brojevi. Koristeći svojstva iz prethodne definicije dokazaćemo neke osobine realnih brojeva.

Teorema 3: Za svaki realan broj x važi: $-(-x) = x$.

Dokaz: $-(-x) = -(-x) + 0$ (0 je neutralni element kod sabiranja)

$= -(-x) + ((-x) + x)$ (aksioma 4, $(-x) + x = 0$)

$= (-(-x) + (-x)) + x$ (svojstvo asocijativnosti kod sabiranja)

$= 0 + x = x$ (aksioma 4, i aksioma 3).

Teorema 4: Za svaki realan broj x važi: $0 \cdot x = 0$.

Dokaz: Slično kao u prethodnoj teoremi koristimo aksiome skupa realnih brojeva.

$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) =$
$(0 + 0) \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0.$

Teorema 5: Za svaki realan broj x važi: $(-1) \cdot x = -x$.

Dokaz: $(-1) \cdot x = (-1) \cdot x + 0 = (-1) \cdot x + (x + (-x)) = ((-1 \cdot x) + 1 \cdot x) + (-x) = (-1 + 1) \cdot x + (-x) = 0 \cdot x + (-x) = 0 + (-x) = -x$.

Teorema 6: Za svaka dva realna broja x i y važi: $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

Dokaz: $-(x + y) = -(x + y) + 0 = -(x + y) + (x + (-x) + y + (-y)) = (x + y) + ((x + y) + (-x) + (-y)) = (-(x + y) + (x + y)) + (-x) + (-y) = 0 + (-x) + (-y) = (-x) + (-y)$, što je trebalo dokazati.

Primjer 4: Dokazati da između svaka dva racionalna broja postoji:

a) barem jedan racionalan broj;
b) beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Rješenje: Ako su a i b dva racionalna broja za koja važi $a \leq b$, tada važi $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ - aritmetička nejednakost (dokazati je!).

a) Koristeći aritmetičku nejednakost za racionalne brojeve a i b ($a \leq b$) zaključujemo da je $\frac{a+b}{2} \in Q$ i da da je to traženi broj.

b) Pretpostavimo da su $a, b \in Q$, $a \leq b$ i da između brojeva a i b postoji samo konačan broj racionalnih brojeva: $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b$. Međutim, to je nemoguće, jer na osnovu tvrđenja (a) između brojeva a i a_1 mora postojati neki novi racionalan broj. Slično za brojeve a_1 i a_2, i tako dalje.

Primjer 5: Odrediti sve cijele brojeve a i b za koje je $1 + \sqrt{3}$ rješenje jednačine: $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$.

Rješenje: Ako uvrstimo broj $1 + \sqrt{3}$ u prethodnu jednačinu dobijamo:

$3(1 + \sqrt{3})^3 + a(1 + \sqrt{3})^2 + b(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0$. Stepenujući, pa transformišući ovaj izraz dobićemo $(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$. Odavde mora biti $4a + b + 42 = 0$ i $2a + b + 18 = 0$, jer je $\sqrt{3}$ iracionalan broj. Rješavajući dobijeni sistem jednačina nalazimo da je $a = -12$ i $b = 6$.

Zadaci za vježbu:

1. Dokazati da je broj $\sqrt{3}$ iracionalan.

2. Dokazati da su sledeći brojevi iracionalni: a) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$; b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

3. Dokazati da ne postoji jednakostranični trougao čija tjemena leže u tačkama sa cjelobrojnim koordinatama.

4. Neka su brojevi a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ racionalni. Kakav je broj $\sqrt{a}-\sqrt{b}$?

5. Dokazati da je broj $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+99}\right)$ racionalan.

6. Dokazati da važi:

   a) $(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$;

   b) $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$.

7. Šta je veće: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ili $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$?

8. Dokazati da je $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}}=\underbrace{33\ldots3}_{n}$.

NAGRADNI ZADATAK SA NASLOVNE STRANE

Dešifrovati množenje

A · B · AB = BBB

pri čemu su A i B jednocifreni brojevi, AB je dvocifreni, dok je BBB trocifreni broj. Cifre A i B su različite.

Prvih 5 (pet) učenika koji mejlom pošalju tačna rješenja zadatka sa obrazloženjima će na poklon dobiti po jedan primjerak narednog broja Dijagonale, a njihova imena će biti objavljena u časopisu.

Zadatak priredila Vanja Đurđić Kuzmanović, JU OŠ „Oktoih", Podgorica

KONTROLNE NAREDBE

NAREDBA switch

Da bi izbjegli pisanje više `if-else` naredbi možemo koristiti naredbu `switch`.

Opšti oblik naredbe `switch`

```
switch ( promjenljiva ) {
     case value_1:
          code_here_1;
          break;
     case value_2:
          code_here_2;
          break;
     ...
     case value_n:
          code_here_n;
          break;
     default:
          code_here_default;
}
```

Testira se vrijednost promjenljive. Ako je jednaka value_1, izvršava se kod code_here1; ako je jednaka value_2, izvršava se kod code_here2; ..., ako je jednaka value_n, izvršava se kod code_here_n. Ako nije jednaka nijednoj od vrijednosti value_1, ..., value_n, izvršava se kod code_here_default. Ako bi izostavili naredbu `break` nakon npr. `code_here_1` onda u slučaju da je promjenljiva jednaka `value_1` nakon izvršenja koda `code_here_1` program bi nastavio sa izvršenjem koda `code_here_2`.

Primjer 1: Na osnovu rednog broja mjeseca, štampati ime mjeseca na engleskom jeziku:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
```

```
{
    int month;
    cin >> month;
    switch (month) {
        case 1: cout <<  "January" << endl; break;
        case 2: cout <<  "February" << endl; break;
        case 3: cout <<  "March" << endl; break;
        case 4: cout <<  "April" << endl; break;
        case 5: cout <<  "May" << endl; break;
        case 6: cout <<  "June" << endl; break;
        case 7: cout <<  "July" << endl; break;
        case 8: cout <<  "August" << endl; break;
        case 9: cout <<  "September" << endl; break;
        case 10: cout <<  "October" << endl; break;
        case 11: cout <<  "November" << endl; break;
        case 12: cout <<  "December" << endl; break;
        default: cout <<  "Pogresan mjesec" << endl; break;
    }
    return 0;
}
```

Prethodni primjer je ekvivalentan sa:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{

    int month;
    cin >> month;
    if (month == 1) {
        cout << "January" << endl;
    } else if (month == 2) {
```

```
        cout << "February" << endl;
    } else if (month == 3) {
        cout << "March" << endl;
    } else if (month == 4) {
        cout << "April" << endl;
    } else if (month == 5) {
        cout << "May" << endl;
    } else if (month == 6) {
        cout << "June" << endl;
    } else if (month == 7) {
        cout << "July" << endl;
    } else if (month == 8) {
        cout << "August" << endl;
    } else if (month == 9) {
        cout << "Septemeber" << endl;
    } else if (month == 10) {
        cout << "October" << endl;
    } else if (month == 11) {
        cout << "November" << endl;
    } else if (month == 12) {
        cout << "December" << endl;
    } else {
        cout << "Pogresan mjesec" << endl;
    }

    return 0;
}
```

Moguće je da kod za više slučajeva (`case`) bude isti. Kako se to radi pokazaćemo u sledećem primjeru.

Primjer 2: Na osnovu rednog broja mjeseca u godini i godine, štampati broj dana u mjesecu. Februar može imati 28 ili 29 dana u zavisnosti od toga da li je godina prestupna ili je prosta. Ostali mjeseci stalno imaju 30 ili 31 dan. Godina je prestupna ako je djeljiva sa 4, a nije djeljiva sa 100 ili ako je djeljiva sa 400. Tako će 2020, 2024 biti prestupne, dok to nisu 2019, 2021. Međutim

2100, 2200,2300 neće biti prestupne jer su djeljive sa 100, dok će 2400 biti prestupna jer je djeljiva sa 400. Ova korekcija se vrši jer se zemlja okrene oko sunca za 365 dana i još približno za jednu četvrtinu dana.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{

    int month, year = 2000;
    cin >> month >> year;
    int numDays = 0; // broj dana u mjesecu
    switch (month) {
        case 1: case 3: case 5: case 7:
        case 8: case 10: case 12:
            numDays = 31; // mjeseci sa 31 danom
            break;
        case 4: case 6:
        case 9: case 11:
            numDays = 30; // mjeseci sa 30 dana
            break;
        case 2: // februar
            if (((year % 4 == 0) && !(year % 100 == 0)) || (year % 400 == 0))
            numDays = 29; // prestupna godina
            else
            numDays = 28; // nije prestupna
            break;
        default:
            cout<<"Pogresan mjesec. ";
            break;
    }
    cout << "Broj dana = " << numDays << endl;


    return 0;
}
```

Promjenljiva u naredbi `switch` mora biti cjelobrojna ili karakter (`char`).

Primjer 3: Upotreba tipa `char` u naredbi `switch`:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    char choice;
    cin>>choice;
    switch (choice) {
        case 'D' : case 'd' :
            cout << "Da";
            break;
        case 'M' : case 'm' :
            cout << "Mozda";
            break;
        case 'N' : case 'n' :
            cout << "Ne";
            break;
        default:
            cout << "Pogresno slovo";
    }

    return 0;
}
```

Primjer 4: Napisati program koji učitava dva cijela broja a i b i u zavisnosti od izbora korisnika računa jednu od vrijednosti: a + b, a – b, a * b, a / b i a % od b. Koristiti naredbu `switch`.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int a,b;
```

```
int izbor;

cout<<" Unesite prvi broj a = ";
cin >>a;
cout<<" Unesite drugi broj b = ";
cin >>b;

cout<<"\n";
cout<<" Izaberite operaciju koju zelite da izvrsite tako sto unesete
odgovarajuci redni broj.\n";
cout<<" 1. Sabiranje (a + b). \n";
cout<<" 2. Oduzimanje (a – b). \n";
cout<<" 3. Množenje (a * b). \n";
cout<<" 4. Cjelobrojno djeljenje (a / b). \n";
cout<<" 5. Ostatak pri djeljenju (a% b). \n";
cout<< "Unesite vas izbor od 1 do 5: ";
cin>>izbor;

switch(izbor) {
    case 1 :
        cout << " a+b = "<<a+b;
        break;
    case 2 :
        cout << " a-b = "<<a-b;
        break;
    case 3 :
        cout << " a*b = "<<a*b;
        break;
    case 4 :
        if (b==0)
            cout<<" Nije definisano djeljenje sa nulom.";
        else
            cout << " a/b = "<<a/b;
        break;
    case 5 :
        if (b==0)
            cout<<" Nije definisano djeljenje sa nulom.";
        else
            cout << " a%b = "<<a%b;
        break;
```

```
    default:
      cout << "Pogresan izbor!";
  }

  return 0;
}
```

ZADACI ZA VJEŽBU

1. Napisati program koji učitava ocjenu na testu i štampa odgovarajuću poruku: odlican, vrlo dobar, dobar, dovoljan ili nedovoljan.

2. Napisati program koji učitava redni broj mjeseca u godini i štampa godišnje doba kojem mjesec pripada. Mjesec pripada godišnjem dobu ako je bar polovina dana u mjesecu iz godišnjeg doba (na primjer, mart pripada zimi, a jun proljeću).

3. Jedno polje šahovske table opisuje se sa dva prirodna broja (a, b) ne veća od 8: a je redni broj vertikale (slijeva udesno), dok je b redni broj horizontale (odozdo naviše). Dati su prirodni brojevi a, b, c, d, e, f, svi manji od 9. Bijeli lovac je postavljen na (a, b), a crni top na (c, d). Napisati program koji učitava brojeve a, b, c, d, e, f i provjerava može li bijela figura doći na polje (e, f), a da ne bude napadnuta od crne figure.

4. Jedno polje šahovske table opisuje se sa dva prirodna broja (a, b) ne veća od 8: a je redni broj vertikale (slijeva udesno), dok je b redni broj horizontale (odozdo naviše). Dati su prirodni brojevi a, b, c, d, e, f, svi manji od 9. Bijela kraljica je postavljena na (a, b), a crni skakač na (c, d). Napisati program koji učitava brojeve a, b, c, d, e, f i provjerava može li bijela figura doći na polje (e, f), a da ne bude napadnuta od crne figure.

5. Učitati prirodan broj k i štampati frazu „Na izletu smo ubrali k pečuraka“, gdje završetak riječi „pečurka“ prilagodite broju k. Npr. 101 pečurku, 1204 pečurke, 506 pečuraka.

6. Data su tri cijela broja A, B, C. Odrediti da li među njima ima bar jedan paran broj i bar jedan neparan broj. Ulaz: Prvi red ulaza sadrži tri cijela broja A, B i C ($1 \leq A \leq 1000$). Izlaz: Štampati „DA“ ili „NE“.

ZADACI ZA VJEŽBU

VI razred

I nivo

1. Ako je $\alpha = 7° 52' 44''$, $\beta = 27° 18' 39''$, $\gamma = 15° 21' 42''$, $\delta = 9° 36' 16''$ izračunati: a) $\alpha + \delta$; b) $\beta + \gamma$; c) $2 \cdot \gamma$; d) $\delta - \alpha$; e) $3 \cdot \beta - 2 \cdot \gamma$; f) $\alpha + \beta + \gamma$.
2. Ako je $\alpha = 11° 11' 11''$ odrediti mjeru njemu komplementnog i mjeru njemu suplementnog ugla.
3. Ako je $\alpha = 15° 15' 15''$ koliko je $4 \cdot \alpha$?
4. Koji ugao je veći: onaj koji je komplementan uglu $\alpha = 24° 10'$ ili onaj koji je suplementan uglu $\alpha = 124° 13'$?
5. Tri radnika su radila isti posao. Prvom je bilo potrebno $\frac{2}{3}$ sata, drugom $\frac{5}{6}$ sata, a trećem $\frac{8}{9}$ sata. Ko je od njih najbrže obavio posao?
6. Marko je sa računa podigao $\frac{3}{5}$ novca što iznosi 3450 eura. Koliko je novca Marko imao na računu?
7. Koliko iznosi $\frac{3}{4}$ broja m, ako je broj m jednak $\frac{1}{2}$ broja 72?
8. Ako je Ana pročitala 35 strana knjige koja ukupno ima 175 strana, koji dio knjige je ona pročitala?
9. Tačke P, Q, R, S su kolinearne P-Q-R-S. Ako je PS = 48 mm, PR = 32 mm, QS = 38 mm, odrediti dužinu duži AB gdje je A središte duži PQ, a B središte duži RS.
10. Tačke M, N, P i R pripadaju jednoj pravoj, a tačke A i B su van te prave. Koliko je:
    a) duži;
    b) pravih
    određeno ovim tačkama?

II nivo

1. Odrediti ugao α, koji je za $18°$ veći od polovine svog suplementnog ugla.

2. Date su tačke A i S. Odrediti tačku B tako da je S središte duži AB, a zatim odredi tačku C tako da je A središte duži CB. Koliko je puta duž CB duža od SB?

3. Izračunati zbir i razliku uglova $\alpha = 444'$ i $\beta = 444''$.

4. Koji dio časa predstavlja: a) 3 min; b) 5 min; c) 10 min; d) 12 min; e) 45 min; f) 60 min; g) 80 min i h) 195 min?

5. Dvije prave se sijeku tako da je jedan od dobijenih uglova za 16° veći od drugog. Izračunati mjere svih dobijenih uglova.

6. Izračunati ugao koji je suplementan svojoj sedmini.

7. Data je ravan α i u njoj prave a i b koje se sijeku. Koji od iskaza su tačni?
   a) Svaka prava ravni α paralelna sa a siječe pravu b.
   b) Ne postoji prava ravni α paralelna i sa a i sa b.
   c) Svaka prava ravni α siječe pravu a ili pravu b.
   d) Postoji prava ravni α koja siječe i pravu a i pravu b.

8. Za koliko je zbir uglova α i β veći od njihove razlike ako je: α = 137° 16'i β = 92° 54'16".

9. Nacrtati kružnice k_1(O, 3 cm) i k_2(O, 4 cm). Nacrtati pravu a čije je rastojanje od tačke O jednako 3 cm. Nacrtati tangentu t kružnice k_2 koja je paralelna pravoj a. Koliko je rastojanje između pravih a i t ? Koliko rješenja ima zadatak?

10. Jato gusaka naiđe na usamljenu gusku. "Zdravo sto gusaka" reče ona. "Da nas je još ovoliko i polovina i četvrtina i ti sa nama bilo bi nas tačno 100" odgovoriše guske. Koliko je bilo gusaka?

Nikola Dukić, JU OŠ „Anto Đedović", Bar

VII razred

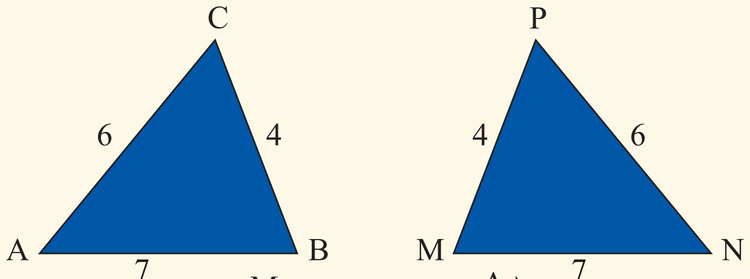
I nivo

1. Da li dati uglovi mogu biti unutrašnji uglovi trougla:
   a) $\alpha = 55°$, $\beta = 65°$ i $\gamma = 75°$,
   b) $\alpha = 50°$, $\beta = 66°$ i $\gamma = 70°$?
2. Da li dati uglovi mogu biti spoljašnji uglovi trougla:
   a) $\alpha_1 = 105°$, $ß_1 = 125°$, $\gamma_1 = 135°$,
   b) $\alpha_1 = 150°$, $ß_1 = 120°$, $\gamma_1 = 90°$?
3. Dva unutrašnja ugla jednog trougla su 74° i 56°. Izračunati treći unutrašnji ugao. Kakav je to trougao prema uglovima?
4. Jedan oštar ugao pravouglog trougla je 38°. Koliki je drugi oštar ugao tog trougla?

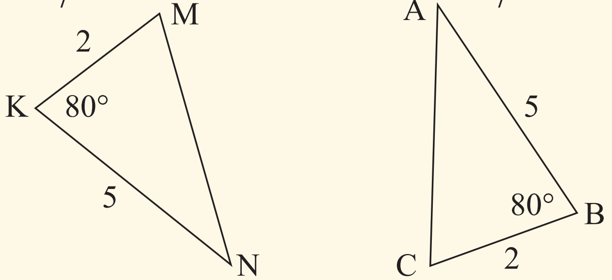
5. U ΔABC unutrašnji ugao je $\alpha = 46°$ i spoljašnji ugao $\gamma_1 = 146°$. Izračunati sve unutrašnje i sve spoljašnje uglove tog trougla.
   a) Kakav je trougao prema uglovima, a kakav prema stranicama?
   b) Uporediti stranice trougla.
6. Dvije stranice trougla su $a = 7\ cm$ i $b = 4\ cm$. Napisati sve prirodne brojeve koji mogu biti mjera treće stranice.
7. a) Koliki su unutrašnji uglovi jednakostraničnog trougla? Objasniti.
   b) Odrediti oštre uglove jednakokrakog pravouglog trougla.

8. a) Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla je $70°$. Izračunati uglove na osnovici.
   b) Jedan unutrašnji ugao na osnovici jednakokrakog trougla je $40°$. Izračunati ostale unutrašnje uglove tog trougla.
9. Perica ima dvije letvice dužina $13\ cm$ i $20\ cm$. Treba za domaći zadatak da napravi model trougla pa je zamolio komšiju stolara da mu da jednu letvicu. Stolar mu je ponudio četiri letvice dužina $6\ cm, 7\ cm, 15\ cm$ i $34\ cm$. Koju je letvicu uzeo Perica?
10. Zapisati podudarnost trouglova na slikama

a)



b)



11. Simetrala duži je skup tačaka u ravni sa osobinom da su sve tačke iz tog skupa jednako udaljene od krajnjih tačaka te duži. Dokazati to svojstvo simetrale.
12. Konstruisati ΔABC ako je dato
    a) $AB = 5\ cm, BC = 6\ cm, AC = 7\ cm,$
    b) $AB = 8\ cm, AC = 5\ cm, \alpha = 75°.$

II nivo

1. U trouglu ABC ugao α je za 18º veći od ugla β, a ugao γ je za 54º manji od β. Odrediti uglove tog trougla.
2. Izračunati unutrašnje uglove trougla ako je α + β =100º i β + γ = 150º.
3. Simetrala ugla na osnovici jednakokrakog trougla gradi sa krakom ugao od 63º. Izračunati uglove tog trougla.
4. Neka je β unutrašnji ugao ΔABC tri puta veći od ugla α, a γ je šest puta veći od ugla α.
   a) Izračunati unutrašnje uglove ΔABC.
   b) Poređati stranice trougla po veličini.
5. Izračunati uglove jednakokrakog trougla ABC ako simetrala kraka BC obrazuje sa pravom AB ugao od 25º.
6. U ΔABC je α=55º i β=66º. Ako stranicu AB produžimo preko tjemena A i B za dužine susjednih stranica AC i BC, dobija se ΔDCE. Izračunati uglove tog trougla.
7. Duž AK je bisektrisa ∡CAB trougla ABC. Iz tačke K spuštene su normalne duži KT i KD redom na stranice AB i AC. Dokazati da je KT = KD.
8. Dokazati da je ma koja tačka sa simetrale ugla pri vrhu jednakokrakog trougla ABC podjednako udaljena od krakova AC i BC.
9. Duž AT je težišna duž trougla ABC. Na produžetku te duži kroz tačku T određena je tačka M tako da je AT = TM. Dokazati da je AC = BM.
10. Na kracima jednakokrakog trougla ABC označene su redom tačke T i K tako da je ∢CAK = ∡CBT. Dokazati da je AK = BT i CT = CK.
11. Konstruisati ΔABC ako je dato:
    a) $AB = 8\ cm, \alpha = 60°, \beta = 45°$,
    b) $AB = 8\ cm, AC = 5\ cm, \gamma = 75°$.
12. a) Konstruisati jednakokraki pravougli ΔABC ako je hipotenuza AB= 5cm.
    b) Konstruisati pravougli ΔABC ako je jedna kateta 4cm i hipotenuza 6cm.

Biljana Bajramović i Anđa Vujović, JU OŠ „Pavle Rovinski” Podgorica

VIII razred

I nivo

1. Izračunati: $a)\ \sqrt{\frac{4}{81}}$, $b)\ \sqrt{\left(\frac{312}{100}\right)^2}$, $c)\ \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2}$, $d)\ \sqrt{\left(-\frac{3}{16}\right)^2}$.

2. Odrediti skup rješenja jednačine:
   $a)\ x^2 = \frac{64}{169}$, $b)\ x^2 = 3{,}29$, $c)\ x^2 = 0{,}000324.$

3. Ako je $a = -\frac{3}{25}$ i $b = 1{,}42$ izračunati:

   $a)\ \sqrt{a^2},\ \ b)\ \sqrt{(a-b)^2},\ \ c)\ \sqrt{(5a-2b)^2}$.

4. Uprostiti izraze: $a)\ 2^4 \cdot 2^7,$ $b)\ (-6)^{11} \cdot (-6)^{12} \cdot (-6)^{13},$

   $c)\ (-1)^{10} \cdot (-1)^7,$ $d)\ (-4)^3 \cdot (4)^7 \cdot (-4)^{11}.$

5. Izračunati: $a)\ \frac{2^8 \cdot 2^7}{2^6 \cdot 2^5}$, $b)\ \frac{4^{12}:4^9}{7^{13}:7^{13}}$, $c)\ \frac{(-1)^{13}\cdot(-1)^2}{(-1)^{14}\cdot(-1)^{11}}$.

6. Izraziti kao proizvod prirodnog broja i korijena prostih brojeva (jedan ili više) sljedeće kvadratne korijene: $a)\ \sqrt{333}$, b) $\sqrt{884}$, c) $\sqrt{3344}$.

7. Provjeriti da li je: $a)\ \sqrt{68} = 2\sqrt{17},\ \ b)\ \sqrt{1053} = 9\sqrt{13}.$

8. Izračunati: a) $\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{32}),\ \ b)\ \sqrt{3}(\sqrt{27}+\sqrt{243}),\ c)\ \sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, a – pozitivan realan broj.

9. Izračunati vrijednost izraza $\sqrt{8} + 3\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. Uprostiti izraz: $x^2y^3 - 1{,}5 \cdot x^2y^3 + 1{,}4 \cdot x^2y^3.$

11. Uprostiti izraz: $a^3 - 2a^2 + 4a - 5 - (-a^3 - 8a + 2a^2 + 5)$

12. Odrediti zbir $W_1 + W_2 + W_3$, ako je:

    $W_1 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{c^3}{4}$, $W_2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{3b^3}{4} - \frac{4c^3}{5}$ i $W_3 = a^3 + b^3 + c^3.$

II nivo

1. Da li su jednakosti: $t^{35} : t^5 = t^7$ i $t^{12} : t^6 = t^2$ tačne za svaki realan broj t?

2. Odrediti x ako je: $a)\ 2^9 : 2^x = 2^4,\ \ b)\ 7^8 : 5^x = 35^8.$

3. Dokazati da je: $1^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 \cdot 4^7 \cdot 5^7 = 120^7$.

4. Šta je veće: $(\sqrt{2})^{31}$ ili $((\sqrt{3})^2)^3$?

5. Dokazati da izraz $\frac{(5^{16})^{3n}}{(25^{6n})^4}$ ne zavisi od vrijednosti prirodnog broja n.

6. Da li je za svaki realan broj x tačno da je $(x^5)^6$ veće ili jednako od $(x^4)^7$?

7. Ako je a cio broj, onda se izraz $a^3 + 3a^2 + 2a$ može predstaviti kao proizvod tri uzastopna cijela broja. Dokazati.

8. Odrediti sve prirodne brojeve k i n takve da je $k^2 - n^2 = 11$.

9. Ako je $a^2 - 12ab + 36b^2 = 0$, onda je $a = 6b$. Dokazati.

10. Postoji li prirodan broj n takav da jednakost

$$1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} + \cdots + 50 \cdot \sqrt{2} = 510 \cdot n \cdot \sqrt{2}$$

bude zadovoljena?

Seid Kršić, JU OŠ „Savo Pejanović”, Podgorica

IX razred

I nivo

1. Dužina dijagonale bočne strane kocke je $10\sqrt{2}$ cm. Izračunati:
a) dužinu prostorne dijagonale, b) površinu dijagonalnog presjeka,
c) površinu kocke.

2. Dužina dijagonale kvadra je 26 cm, a ivice osnove su dužina 8 cm i 6cm. Izračunati: a) površinu, b) površinu omotača, c) površinu dijagonalnog presjeka kvadra.

3. Izračunati površinu pravilne: a) trostrane, b) četvorostrane, c) šestostrane prizme, ako je obim osnove 12 cm, a visina 10 cm.

4. Pozitivno rješenje jednačine $2x^2 - 10 = 40$ je dužina ivice jednakoivične šestostrane prizme, data u cm. Izračunati površinu omotača te prizme.

5. a) Rješenje jednačine $2 + 5a = 3(2a - 1)$ je dužina osnovne ivice pravilne četvorostrane prizme data u cm. Izračunati površinu prizme ako je $H=2a$.
b) Najveće cjelobrojno rješenje nejednačine $7a + 4 < 2(3a + 4)$ je dužina osnovne ivice pravilne trostrane prizme u cm. Naći površinu te prizme ako je $H = 2a$.

6. Za $f(x) = 2x^2 - 4$ odrediti:
a) $f(-1)$, $f(-2)$, $f(3)$; b) $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{5})$; c) $f(0{,}5)$, $f(-0{,}25)$;
d) $f(-2a)$, $f(-3a)$; e) x ako je $f(x) = 28$ i ako je $x < 0$.

7. Za funkciju $y = (-3a + 4)x + 12$ odrediti vrijednost parametra a tako da:
a) funkcija bude rastuća, b) funkcija bude opadajuća,
c) grafik te funkcije bude paralelan sa grafikom funkcije $y = -5x + 16$.

8. Nacrtati grafik funkcije: a) $y = -6x + 3$, b) $y = 10x + 5$, a zatim odrediti znak i tok te funkcije. Da li tačke $A(-2, 15)$ i $B(1{,}5; 20)$ pripadaju graficima datih funkcija?

9. Odrediti linearnu funkciju čiji grafik siječe x osu u tački $(0{,}5; 0)$ a na y osi odsijeca odsječak dužine -2.

10. Nacrtati grafik funkcije $2x + 3y - 6 = 0$ i odrediti koordinate tačaka A i B u kojima grafik siječe koordinatne ose. Izračunati površinu trougla AOB (O je koordinatni početak).

II nivo

1. Osnova prave trostrane prizme je pravougli trougao čija je jedna kateta duga 4 cm, a hipotenuza je za 2 cm duža od druge katete. Izračunati površinu te prizme ako je najveća strana omotača kvadrat.

2. Izračunati površinu prave četvorostrane prizme čija je osnova romb obima 20 cm čiji je unutrašnji ugao 30º, ako je visina osnove 4 puta manja od visine prizme.

3. Razvijeni omotač pravilne trostrane prizme je kvadrat površine 36 cm^2. Izračunati površinu te prizme.

4. Dijagonala pravilne četvorostrane prizme dužine $10\sqrt{2}$ cm zaklapa sa ravni osnove ugao od 45º. Izračunati površinu prizme.

5. Površina osnove pravilne šestostrane prizme je $6\sqrt{3}\ cm$, a osnovna ivica i visina te prizme su u razmjeri 2 : 5. Izračunati površinu omotača te prizme.

6. Odrediti linearnu funkciju čiji grafik prolazi kroz tačku (–2, 3) i paralelan je sa grafikom funkcije $3x + 6y – 7 = 0$.

7. Nacrtati grafike funkcija $y = 0,5x + 3$ i $y = – 0,4x + 2$ i izračunati površinu trougla ograničenog datim pravama i x osom.

8. Odrediti vrijednost parametra a tako da linearna funkcija:
   a) $2x – y + a = 0$ ima nulu funkcije za $x = – 0,5$;
   b) $(a – 2)x – 2y + a = 0$ odsijeca na y osi odsječak dužine – 3.

9. Odrediti vrijednost parametra a tako da grafik linearne funkcije $(a – 2)x – 2y + 8 = 0$ bude prava paralelna sa grafikom funkcije $y = – 0,5x + 10$. Za tako dobijenu vrijednost parametra a, nacrtati grafik funkcije i odrediti vrijednosti promjenljive x tako da je $y > 5$.

10. Nacrtati grafik funkcije: a) $f(x) = |x| + 1$, b) $f(x) = |x| – 2$,
    c) $f(x) = |x + 1|$, d) $f(x) = |x – 2| + 1$, e) $f(x) = –|x|$.

Danijela Jovanović, JU OŠ „Milorad Musa Burzan“ Podgorica

ODABRANI ZADACI

VI razred

1. Komplement ugla α je četiri puta manji od suplementa ugla α. Izračunati mjeru ugla α.

2. Izračunati uglova α, β i γ, ako je:

$$99 \cdot \alpha = 1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \cdots + 98^0 + 99^0$$
$$\beta = 1^0 1' + 2^0 2' + 3^0 3' + \cdots + 9^0 9'$$
$$\gamma + 10' = 1^0 1' + 1^0 2' + 1^0 3' + \cdots + 1^0 19'$$

3. Ana pojede jednu i po čokoladu za jedan sat, Ana i Boro zajedno pojedu jednu trećinu čokolade za 10 minuta. Za koje vrijeme Boro sam pojede jednu čokoladu ako su sve čokolade jednake i jedu ih ravnomjerno?

4. Koliko najmanje sabiraka može da bude u izrazu da bi važilo:
   BROJ + BROJ + … + BROJ = AAAAAA.

VII razred

1. Dato je pet različitih cijelih brojeva a, b, c, d i e, takvih da je
   $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12.$
   Odrediti zbir a + b + c + d + e.

2. Jedan oštar ugao pravouglog trougla je pet puta veći od od drugog oštrog ugla. Dokazati da je hipotenuza ovog trougla četiri puta veća od hipotenuzine visine.
3. U trouglu ABC je $\alpha-\beta=40^0$. Ako je tačka D na stranici BC takva da je AC = CD, izračunati ugao BAD.
4. Jedan ugao pravouglog trougla je $17^0 30'$. Pod kojim se uglom vide katete iz centra kruga opisanog oko ovog trougla?

VIII razred

1. Sa koliko cifara se zapisuje broj $4^{16}\cdot 5^{25}$?
2. Napiši broj 7. Drugi broj i svaki sledeći se dobija tako što se prethodni broj kvadrira, saberu se cifre dobijenog kvadrata i tom zbiru doda 1. Tako da su drugi i treći brojevi 14 i 17. Odrediti 2000. broj.
3. Šta je veće: $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ ili $3\sqrt{5}+7$?
4. Odrediti cifre a i b $(a\neq b)$ tako da $0,\overline{abab\ldots}$ bude jednak nesvodljivom razlomku za koji je zbir imenioca i brojioca jednak 17.

IX razred

1. Duž AB pripada pravoj koja je paralelna ravni α. Tačka A je od tačke C koja pripada ravni α udaljena 10cm, a tačka B od tačke D iste ravni udaljena je 17cm. Odrediti udaljenost tačaka A i B od ravni α, ako je razmjera ortogonalnih projekcija duži AC i BD na ravan α, 2 : 5.
2. Odrediti vrijednost parametra p tako da funkcija $(3-p)x+(p-1)y-2=0$ predstavlja pravu koja je paralelna osi Oy.
3. Izračunati površinu trougla koji grafik funkcije $y=|1-x|-|2x+4|$ obrazuje sa Ox osom.
4. Ako je $f(x)=2x+3$, odrediti funkciju y = g(x) iz uslova $f\big(3+g(x)\big)=11-4x$.

Irena Pavićević, JU OŠ „Štampar Makarije“, Podgorica

KONKURSNI ZADACI

VI razred

1. Ako nekom broju dopišemo nulu s desna, pa dobijeni broj podijelimo sa 25, a zatim dobijenom količniku sdesna dopišemo 1 i dobijeni broj podijelimo sa 17, dobija se broj 13. Koji je to broj?
2. Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji pri djeljenju sa 2, 3, 4, 5, 6 daje redom ostatke 1, 2, 3, 4, 5? Navedi najmanji i najveći broj.

VII razred

1. Dat je razlomak $\frac{57}{71}$. Koji broj treba oduzeti od brojioca, a dodati imeniocu, pa da se dobije razlomak koji poslije skraćivanja iznosi $\frac{1}{3}$?
2. Četiri arhitekte su prošlog mjeseca radili na važnom projektu, zbog kojeg nijesu mogli ići na godišnji odmor. Na taj način zaradili su prekovremeno ukupno 14 135 eura. Ovaj iznos treba podijeliti arhitektama srazmjerno broju časova provedenih baveći se projektom. Brojevi časova koje su ove arhitekte provele na poslu, stoje u razmjeri $a:b:c:d$, gdje su a, b, c i d razlomci kojima su imenioci jednocifreni brojevi i pri tom je $\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}$. Koliko je zaradio svaki arhitekta?

VIII razred

1. Odrediti tri prosta broja takva da je njihov proizvod sedam puta veći od njihovog zbira.
2. Polinom $(x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 + 1) - 1$ rastaviti na činioce, a zatim dokazati da on ima pozitivne vrijednosti za svako pozitivno x, a negativne za svako negativno x.

IX razred

1. Izračunati $f(2)$ ako se zna da je $\frac{1}{2} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$
2. Naći brojeve x i y koji zadovoljavaju jednačinu
$9x^2 + 16y^2 + 6x - 24y + 10 = 0.$

Vesna Matković, Sanja Popović, Miloš Gojačanin, Aleksandra Čejović,
JU OŠ „Drago Milović“, Tivat

Pozivamo učenike da nam šalju rješenja konkursnih zadataka. Uspješni rješavaoci će biti nagrađeni!

RJEŠENJA KONKURSNIH ZADATAKA IZ PROŠLOG BROJA

VI razred

1. Tri žene i njihovi muževi:
Neko je trojici svojih rođaka i njihovim ženama ostavio u nasljedstvo 1000 dolara. Sve tri žene dobile su ukupno 396 dolara. Dara je dobila 10 dolara više od Mare, a Sara 10 dolara više od Dare. Sajo je dobio koliko i njegova žena. Pavle je dobio za polovinu sume više od svoje žene, a Darko dvostruko više od svoje žene.
Kako se zvala žena svakog od trojice pomenutih muškaraca?

2. Ispravite grešku:
Često se dešava, kada djeca počinju da izučavaju aritmetiku, da pogriješe pri množenju brojeva u čijim zapisima se javljaju nule. Tako se to dogodilo i malom Marku, kada je množio neki broj sa 409. Naime, prvu cifru pri množenju tog broja sa 4 on nije napisao ispod treće cifre s desna, kao što treba, nego ispod druge. Otuda se pojavila greška, koja je iznosila, ni manje ni više, nego 328320.
Koji broj je množio Marko sa 409?

Rješenja:

1. Ako sa x označimo sumu novca koji je naslijedila Mara, onda zapisujemo Darinu i Sarinu sumu novca sa x + 10, odnosno x + 20, pa je:

$x + 10 + x + x + 20 = 396$, odnosno $x = 122$,

što znači da je Dara naslijedila 132 dolara, Mara 122 i Sara 142 dolara.

Od mogućih suma novca koji su naslijedili Sajo, Pavle i Darko možemo napraviti tablicu

SAJO	132	122	142
PAVLE	198	183	213
DARKO	264	244	284

Od devet brojeva iz tablice tri predstavljaju sume novca koje su naslijedili Sajo, Pavle i Darko, uz uslov da je u svakoj horizontali i u svakoj vertikali po jedan od njih.

Osim toga, njihov zbir mora da iznosi 1000 – 396 = 604. Te uslove ispunjavaju brojevi 198, 122 i 284, pa je Sajova žena Mara, Pavlova Dara i Darkova Sara.

2. Greška koju je napravio Marko je u tome što je on, praktično, dati broj pomnožio, ne sa 409, već sa 49, pa je traženi broj
328320 : (409 – 49) = 912.
Dakle, Marko je trebalo da pomnoži brojeve 912 i 409.

VII razred

1. Odrediti sve cijele brojeve m za koje je izraz $\frac{2m-5}{m+2}$ cio broj.

2. Svaki put kada pogriješi pri izradi domaćeg zadatka, Milan istrgne jedan list iz sveske. Tako mu se desilo da iz jedna sveske istrgne 25% listova, a iz druge, iste takve sveske, svaki deveti list. Koliko je bilo prvobitno u svakoj svesci i za koliko procenata se smanjio ukupan broj listova (u obje sveske zajedno) ako je Milan istrgao ukupno 26 listova?

Rješenje:

1. $\frac{2m-5}{m+2} = \frac{2m+4-9}{m+2} = 2 - \frac{9}{m+2}$.

   Dakle, $(m+2)\,|9$, tj. $(m+2) \in \{-9,-3,-1,1,3,9\}$,
   a $m \in \{-11,-5,-3,-1,1,7\}$.

2. Broj listova u svakoj svesci djeljiv je sa 4 i sa 9, odnosno sa 36. Ako u sveskama ima po 36x listova, onda je Milan iz prve sveske istrgao 9x, a iz druge 4x listova. Iz 9x + 4x = 26, dobijamo da je x = 2, pa u sveskama ima $36 \cdot 2 = 72$ listova. Broj listova ove sveske je smanjen za $\frac{26}{2\cdot 72} \cdot 100 = 18{,}16\%$.

VIII razred

1. Za proizvoljne cijele brojeve x i y važi da $11 \,|\, ((x+y)^2 + 7xy)$. Dokazati da je razlika kvadrata brojeva x i y djeljiva sa 11.

2. Jakov je izjavio: “Na skupu je 1 999 učesnika pri čemu svako od njih ima tačno 3 kolege među njima.” Da li je ovo tačno tvrđenje?

Rješenja:

1. Sređivanjem izraza dobijamo: $(x + y)^2 + 7xy = x^2 + 2xy + y^2 + 7xy = x^2 + 9xy + y^2 = x^2 - 2xy + 11xy + y^2 = (x - y)^2 + 11xy$. Kako je dati izraz djeljiv sa 11, to je $(x - y)^2$ djeljivo sa 11, a odatle je i $(x - y)$ djeljivo sa 11. Imamo da je $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, a kako 11dijeli $(x - y)$ to slijedi da je razlika kvadrata brojeva x i y djeljiva sa 11, tj. 11 dijeli $x^2 - y^2$.

2. Ne. Ukupan broj kolega je jednak proizvodu brojeva 3 i 1 999 a to nije moguće jer je to neparan broj. Naime ako kažemo da je osoba X kolega sa osobom Y, onda je i osoba Y kolega sa X, što znači da imamo par kolega X i Y. Proizvod brojeva 3 i 1 999 je zapravo ukupan broj kolega, a polovina tog proizvoda bi bila broj parova kolega. Kako polovina proizvoda $3 \cdot 1\,999$ nije cio broj, to je tvrđenje nemoguće.

IX razred

1. Odrediti sve parove prirodnih brojeva čija je razlika kvadrata 195.

2 Odrediti sa koliko nula se završava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do 81.

Rješenja:

1. Na osnovu uslova zadatka imamo da za tražene brojeve x i y važi:
$x - y = (x - y)(x + y) = 195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$, pa razlikujemo sljedeće slučajeve:

$x - y = 1$	$x - y = 3$	$x - y = 5$	$x - y = 13$
$x + y = 195$	$x + y = 65$	$x + y = 39$	$x + y = 15.$

Rješavanjem datih sistema dobijamo:
$(x, y) = (98, 97)$ ili $(x, y) = (34, 31)$ ili $(x, y) = (22, 17)$ ili $(x, y) = (14, 1)$.

2. Ako se dati proizvod rastavi na proste činioce tada svaki proizvod brojeva 2 i 5 se završava nulom. Zaključujemo da treba izbrojati proizvode brojeva 2 i 5 i tako dobiti broj nula sa kojim se završava dati proizvod. Proizvoda $2 \cdot 5$ imamo 19 pa se proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do 81 završava sa isto toliko nula. Do broja 19 došli smo tako što smo od brojeva 5,10,15,20,…,80 rastavljanjem na proste činioce dobili 19 petica (rastavljanjem brojeva 25,50 i 75 dobijaju se po dvije petice što je ukupno 6, a rastavljanjem preostalih navedenih brojeva po jedna petica).

PRIPREMA ZA ČAS

Škola	JU OŠ "Štampar Makarije" Podgorica
Predmet	Matematika
Razred	VI
Pojmovi / sadržaji	Upoređivanje razlomaka
Ishod učenja	Učenici će moći da: – Upoređuju po veličini razlomke – Primjenjuju naučeno u zadacima – Primjenjuju u svakodnevnom životu
Oblici rada	Frontalni i individualni
Nastavne metode	Monološko-dijaloška
Nastavna sredstva	Pripremljen nastavni listić za učenike
Nastavnica	**Stanislavka Aprcović, prof.**

Uvodni dio časa

– Obnavljanje o vrstama razlomaka:
1. Koji razlomak nazivamo pravim razlomkom?
2. Koji razlomak nazivamo nepravim razlomkom?
3. Može li pravi razlomak biti veći od 1?
4. Da li je svaki nepravi razlomak veći od 1?
5. Koji je razlomak veći, ako je jedan od njih pravi, a drugi nepravi?

– Zatim obnoviti:
1. Šta znači proširiti razlomak?
2. Šta znači skratiti razlomak?

Glavni dio časa

Učenici samostalno rade pripremljene zadatke (prilog) na nastavnom listiću. Nastavnik pomaže onima koji suviše sporo napreduju ili se ne snalaze.

Završni dio časa

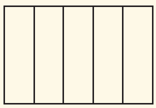
Provjera tačnosti urađenih zadataka (usmeno i na tabli) i zadavanje domaćeg zadatka.

NASTAVNI LISTIĆ

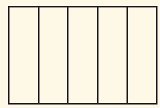
Upoređivanje razlomaka

1. Marija je pojela $\frac{2}{5}$ čokolade, a Anja $\frac{4}{5}$ čokolade.

   a) Osjenčiti koliko je pojela Marija, a koliko Anja.



Marija



Anja

   b) Ko je pojeo više čokolade?

   c) Koji od razlomaka je veći: $\frac{2}{5}$ ili $\frac{4}{5}$?

2. Dopuniti rečenicu: Od dva razlomka jednakih imenilaca veći je onaj čiji je brojilac ____________.

3. Upisati znak < ili > tako da tvrđenje bude tačno:

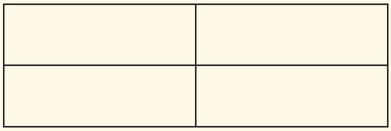
   a) $\frac{5}{7} \bigcirc \frac{3}{7}$; b) $\frac{5}{3} \bigcirc \frac{5}{3}$; c) $\frac{13}{20} \bigcirc \frac{5}{20}$.

4. Sljedeće razlomke poređati od najmanjeg prema najvećem:

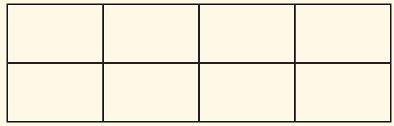
   $\frac{16}{11}, \frac{13}{11}, \frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{5}{11}$.

5. Pavle i Milan su se takmičili u izradi zadataka. Za isto vrijeme Pavle je uradio $\frac{3}{4}$, a Milan $\frac{3}{8}$ zadatka.

   a) Osjenčiti koliko je uradio Pavle, a koliko Milan.



Pavle



Milan

   b) Ko je uradio više?

   c) Uporediti razlomke $\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{8}$.

6. Dopunti rečenicu: Od dva razlomka jednakih brojilaca veći je onaj čiji je imenilac ___________.

7. Uporediti razlomke: a) $\frac{5}{7} \bigcirc \frac{5}{8}$; b) $\frac{6}{7} \bigcirc \frac{6}{11}$; c) $\frac{7}{20} \bigcirc \frac{7}{3}$.

8. Poređati od najmanjeg do najvećeg razlomke: $\frac{17}{6}, \frac{17}{4}, \frac{17}{9}, \frac{17}{7}, \frac{17}{11}$.

9. a) Popuniti prazna mjesta: $\frac{4}{5} = \frac{\quad}{15}$; $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{15}$.

   b) Uporediti razlomke: $\frac{4}{5}$ i $\frac{2}{3}$.

10. a) Razlomke $\frac{9}{4}$ i $\frac{8}{3}$ proširiti tako da njihov imenilac bude NZS(4,3).

    b) Uporediti razlomke $\frac{9}{4}$ i $\frac{8}{3}$.

11. a) Razlomke $\frac{10}{4}$ i $\frac{9}{6}$ skratiti svodeći ih na isti imenilac.

    b) Uporediti razlomke $\frac{10}{4}$ i $\frac{9}{6}$.

12. Dopuniti rečenicu: Dva proizvoljna razlomka možemo uporediti svodeći ih na isti _____________, pa ih zatim upoređivati kao razlomke jednakih imenilaca.

13. a) Razlomke $\frac{4}{11}$ i $\frac{3}{10}$ proširiti tako da njihov brojilac bude NZS(4,3).

    b) Uporediti razlomke $\frac{4}{11}$ i $\frac{3}{10}$.

14. a) Razlomke $\frac{6}{9}$ i $\frac{4}{10}$ skratiti svodeći ih na isti brojilac.

    b) Uporediti razlomke $\frac{6}{9}$ i $\frac{4}{10}$.

15. Dopunititi rečenicu: Dva proizvoljna razlomka možemo uporediti svodeći ih na isti ____________ , pa ih zatim upoređivati kao razlomke jednakih brojilaca.

16. Razlomke $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}$ poređati od najmanjeg do najvećeg.

Mr Radomir Božović

EUKLID

Oko 300. g. p. n. e. u Aleksandriji (Egipat) je živio čovjek čije se djelo po uticaju na buduće generacije može mjeriti sa Biblijom. To je bio Euklid i njegovo djelo ***Elementi***. Njegovi pristupi nadahnjivali su filozofe, i određivali prirodu matematike do duboko u XIX vijek. *Elementi* su predstavljali sastavni dio višeg obrazovanja ljudi, kako iz predjašnjih vremena, tako i danas. Govoriti o Euklidu nezavisno od *Elemenata* je veoma teško, tako da je priča o Euklidu prožeta pričom o *Elementima*.

Smatra se da je Euklid rođen oko 325. g. p. n. e. ali se ne zna tačno gdje, a umro je 265. g. p. n. e. u Aleksandriji, koja je u to vrijeme bila i prijestonica matematike. O njegovom životu se zna vrlo malo. Neki istoričari su smatrali da je rođen u Megari. Međutim, istina je da je iz Megare Euklid, ali filozof, koji je živio stotinak godina poslije Euklida matematičara.

Proklo (411. g. Konstantinopolj, danas Istanbul – 485 god. Atina) u svojim „Komentarima" pominje priču, koju je navodno u svojim spisima zabilježio **Arhimed** (287. god. p. n. e. do 212 g. p. n. e.) da je Ptolomej, vladar Egipta, pitao Euklida da li postoji kraći put za ovladavanje geometrijom nego što su njegovi *Elementi*, na šta mu je ovaj odgovorio da u geometriji nema kraljevskih puteva. Da li je ova anegdota istinita ili ne, da li su je prepisivači Arhimedovih djela naknadno dopisali ili ne, nije lako odgovoriti. Ali, i činjenica da je Arhimed živio u vrijeme Ptolomeja II, znači poslije Euklida, odredila je da Euklida smjestimo u gore pomenuto vrijeme.

Velika poteškoća koja nastaje pri izučavanju matematike antičke Grčke, pa samim tim i *Elemenata* je nedostatak originalnih rukopisa. Činjenica je da ni jedan originalni rukopis nijednog grčkog matematičara prije Euklida nije sačuvan i nije dospio do nas, jer *Elementi* su bili napisani na svitku papirusa.

Papirus je tada bio osnovno sredstvo na kome se pisalo. Dobijao se iz biljke papirus koja u obliku gustog žbunja raste u močvarama delte Nila. Takvi svici su najčešće bili dugi oko 10 metara i veoma krhki. Tek sredinom prvog milenijuma nove ere papirus je zamijenjen čvršćim materijalom – pergamentom, koji se dobija kada se teleća ili jagnjeća koža istanji i presuje.

Najstariji prepis *Elemenata* s kojim raspolažemo potiče iz 888. godine n.e. i medju istraživačima je običaj da ga označavaju sa ***E888***. Ni on nije originalni grčki tekst, već se zasniva na izdanju *Elemenata* sa komentarima koje je napravio **Teon Aleksandrijski** (335 – 405) krajem IV vijeka n. e.

Još jedna anegdota se vezuje za Euklida. Naime, kada je neki učenik pitao Euklida koju korist stiče izučavajući geometriju, Euklid je naredio pomoćniku da učeniku da tri obola (sitan novac iz tog vremena), kako bi učenik imao neku korist.

Sem *Elemenata*, za Euklida se vezuju još neka djela. Sačuvani su sledeći radovi: 1. *Data* (ono što je dato), je djelo koje sadrži 95 teorema, koje izražavaju stav da kada su dati izvjesni geometrijski oblici, onda su dati i drugi oblici; 2. *Fenomeni*, je rad posvećen osnovama geometrije sfere i astronomije; 3. *Optika*; 4. *O dijeljenju figura* i 5. *Katoprika* – teorija ogledala. Proklo za Euklida vezuje i radove o muzici, *Uvod u harmoniju* i *Kanonske sekcije*. Neki arapski izvori Euklidu pripisuju dva aksiomatski zasnovana djela: *O težini i svjetlosti* i *Knjiga o ravnoteži*. Sva ova djela, uključujući i *Elemente* ocrtavaju Euklida, ne samo kao znamenitog profesora aleksandrijskog Muzeja, već i kao naučnika sa plodnim stvaralačkim darom. Proklo čak tvrdi da je Euklid bio đak Platonove Akademije, a u prilog tome ide i činjenica da su mu dobro bili poznati radovi Eudoksa (408. god. p. n. e. do 355. god. p. n. e.) i Teeteta (417. god. p. n. e. do 369. god. p. n. e.), dvojice najznačajnijih matematičara iz Atine, kao i Aristotelov pristup aksiomatskom zasnivanju matematike i nauke uopšte.

Euklidovi *Elementi* su pisani oko 300. god. p. n. e. i u naredna 22 vijeka su pokazali ogromnu naučnu i kulturnu vrijednost. Oni su prevedeni i komentarisani kod gotovo svih kulturnih naroda. Do 1900. god. bibliografi su pronašli preko 1700 izdanja te knjige, što je poslije *Biblije*, čak i danas, stavlja na drugo mjesto po broju izdanja koje je doživjela jedna knjiga. Još u antičko vijeme su *Elementi* smatrani velikim djelom, što nam najbolje može potvrditi veliki broj komentara *Elemenata*. Najznačajniji među njima su Heron (oko 100 god. n. e.), Porfirije (III vijek n. e.), Pap (početak IV vijeka n. e.), Proklo (V vijek n. e.). *Elementi* su prvi put u Zapadnoj Evropi štampani 1492. god. u Veneciji, u prevodu sa arapskog na latinski jezik.

Koristeći rukopis *E888* (sa komentarima Teona Aleksandrijskog iz IV vijeka n. e.), danski matematičar I. L. Heiberg (1854 – 1928) je izvršio rekonstrukciju *Elemenata*, koju je kasnije doradio najpoznatiji engleski istoričar matematike T. L. Heath (1861 – 1940), i koja se smatra najbližom originalnom Euklidovom rukopisu.

Elemente je na srpski jezik preveo akademik Anton Bilimović, emigrant iz carske Rusije, a izdavač je bila Srpska Akademija nauka u periodu od 1949. do 1957. godine.

Osnovno u *Elementima*, što se i danas smatra najznačajnijim, jeste zasnivanje matematike aksiomatski kao teorijske discipline. Naravno, Euklid nije sam radio na ovakvom zasnivanju matematike, jer još od Pitagore (živio 200 godina prije Euklida), preko Eudoksa, Teetea i drugih znamenitih grčkih matematičara, matematika se odvajala od nauke sazdane za praktične (svakodnevne) potrebe, do teorijske discipline koja kulminaciju doživljava u *Elementima*.

U *Elementima* se geometrija zasniva aksiomatski počevši od definicija, koje su opisi osnovnih pojmova, a onda se preko aksioma i postulata, koji se smatraju očiglednim činjenicama, dolazi do stavova, koji predstavljaju istine o našm prostoru i koji se dokazuju.

Elementi imaju 130 definicija i 465 stavova, pet postulata i devet aksioma. Izdijeljeni su u 13 knjiga. Zapravo, jedna knjiga čini jedno poglavlje, i one se ne izdvajaju u posebne tomove, jer su obimom nevelike, već zajedno čine jednu cjelinu. Po sadržaju se tih 13 knjiga može podijeliti u tri dijela. Prvih 6 knjiga čini planimetriju, pri čemu se u petoj knjizi teorija proporcija razmatra na dužima. Sledeće četiri knjige su aritmetičkog sadržaja, sa teorijom nesamjerljivih veličina u X knjizi. Zadnje tri knjige su posvećene stereometriji. Smatra se da se knjige I, II, VII, VIII i IX temelje na radovima pitagorejaca, knjige III i IV se pripisuju djelu Hipokrita sa Xiosa, knjige X i XIII Teetetu, a knjige V, VI i XII Eudoksu sa Knidosa.

U knjizi se ne nalaze sadržaji tri oblasti matematike razvijene u to doba: konike, sferne geometrije i primjene u računanju. Nema ni nekih konstruktivnih problema kojima se, prema nekim istoričarima bavio i sam Euklid. Tri klasična problema: Udvostručenje kocke, kvadratura kruga i trisekcija ugla se takođe ne pominju u *Elementima*. Ovo ukazuje na to da *Elementi* nijesu imali za cilj da svu poznatu matematiku objedine na jednom mjestu. Proklo u svojim Komentarima kaže da „Elementi“, u odnosu na ostale matematičke oblasti, stoje kao slova azbuke prema jeziku.

Elementi nijesu kroz istoriju imali uticaj samo na matematiku, već i na nauku i kulturu uopšte. Bertran Rasel (1872 – 1970) u svom djelu *Istorija* *zapadne filozofije* kaže: Euklidovi *Elementi* su zasigurno jedna od najvećih knjiga koja je ikada napisana i jedan od najznačajnijih monumenata grčkog intelekta. Nijedna druga knjiga sem *Biblije* nije imala toliki uticaj na razvoj nauke i filozofije, a samim tim kulture i civilizacije uopšte. Aksiomatizacija geometrije u *Elementima* je postala model za zasnivanje drugih nauka: otkriti očigledne činjenice iz kojih se dedukcijom mogu izvesti ostale istine. Galilej je u fizici tražio aksiome, Njutn u svom djelu *Matematički principi filozofije prirode* organizuje izlaganja na Euklidski način – iz tri klasična zakona mehanike izvodi ostale pojave u mehanici. Ajnštajn svoju teoriju relativiteta zasniva na postulatima – euklidski. I u politici XVIII vijeka je prisutna aksiomatizacija. Deklaracija nezavisnosti Sjedinjenih Američkih Država počinje sa: „Smatramo da su sljedeće istine same sobom očevidne…”. Takođe se u povelji Ujedinjenih Nacija o pravima čovjeka polazi od osnovne pretpostavke da su narodi među sobom ravnopravni, a prava svih ljudi, bez obzira na pol, rasu i vjeru se izjednačavaju. I to su aksiome!

Aleksandrija je grad u Egiptu, na ušću Nila u Sredozemno more. Izgrađena je po zamisli Aleksandra Makedonskog, i ubrzo je postala metropola koja je bila kulturno, trgovačko i upravno sjedište tadašnjeg svijeta. Ulice su bile široki bulevari koji su imali rešetkast raspored. Aleksandar je umro ne dočekavši završetak svog arhitektonskog remek djela, a gradnju grada je završio njegov general Ptolomej, nazvan Ptolomej I. Ptolomejev sin, Ptolomej II, je 290 g. p. n. e. sagradio veliku biblioteku i Muzej

u Aleksandriji. Naziv Muzej dobio je ime po Grčkim muzama (boginjama umjetnosti i vještine, kojih je bilo sedam), ali je, ustvari, Muzej bio istraživački institut ili univerzitet, prva državna institucija te vrste u svijetu, donekle slična Platonovoj Akademiji ili Aristotelovom Liceju. Muzej je bio grandiozan arhitektonski objekat sa prostorijama za rad i stanovanje. Njegov najveći dio činila je biblioteka (grčki biblos = papirus) projektovana da primi preko 500000 knjiga (svitaka papirusa). Muzej je finansiran direktno od strane Ptolomeja (za razliku od Akademije i Liceja koji su finansirani od strane svojih polaznika), koji je svojim naučnicima obezbjeđivao sredstva za dobar život.

Odmah po osnivanju Muzeja i Biblioteke, Ptolomej je pokrenuo veliki projekat prikupljanja naučnika, filozofa i umjetnika na rad u Muzeju, i uopšte u Aleksandriji, ali i prikupljanje svih raspoloživih knjiga na svijetu u Biblioteci. Ptolomej II je uputio proglas svim svjetskim vladarima da pozajmi njihove knjige. Rukopisi koji su mogli da se kupe plaćani su zlatom, dok su do nekih rukopisa dolazili putem prevare, a nekad i krađom. Čak su i putnici, i brodovi koji su ulazili u luku bili dobro pretresani s ciljem da se pronađe neka knjiga. Ako je nema u Biblioteci, uzimali su je, prepisivali i potom vraćali. Na taj način je Bibloteka postala mjesto gdje su sadržane skoro sve grčke knjige počev od Homera. Procjenjuje se da je Biblioteka do 47. g. n. e. imala između 500000 i 700000 knjiga. Dakle, skoro svo znanje tadašnjeg svijeta je bilo smješteno u Biblioteci, a Muzej je bio središte i radionica skoro svih ljudi značajnih za nauku i kulturu tog vremena. Ptolomej je kao i Aleksandar bio kosmopolita, koji je u grad primao ljude nezavisno od porijekla. Aleksandrija je postala multietnički grad koga su ravnopravno naseljavali Grci, Arapi, Jevreji, Tračani i drugi doseljenici iz Evrope. Jedno vrijeme je brojala između 500000 i 1000000 stanovnika. Još jedno znamenje je karakteristika Aleksandrije tog vremena – svetionik, jedno od sedam antičkih čuda.

ZANIMLJIVOSTI O BROJEVIMA

NEOBIČNE JEDNAKOSTI

Postoje samo dva trocifrena broja koji imaju osobinu da se bilo koji njihov stepen (kvadrat, kub, četvrti stepen, itd.) završava istim ciframa kao i ti brojevi i to u istom redosljedu:

$376^2 = 141\ \underline{376}$ $\quad$ $376^3 = 53\ 157\ \underline{376}$

$625^2 = 390\ \underline{625}$ $\quad$ $625^3 = 244\ 140\ \underline{625}$

Ako se kvadrat nekog broja završava istim ciframa kao i sam taj broj, onda će se i svaki drugi stepen tog broja (s cijelim pozitivnim izložiocem) završavati tim istim ciframa, na primjer:

$$76^2 = 57\underline{76}$$

$$76^3 = 438\ 9\underline{76}$$

Uopšte, $***76^n = ***\ *\underline{76}$

Evo nekoliko zanimljivih stepenovanja:

$9^2 = 81$ pri čemu je $8 + 1 = 9$;

$27^3 = 19683$, $\quad 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$;

$22^4 = 234256$, $\quad 2 + 3 + 4 + 2 + 5 + 6 = 22$;

$35^5 = 52521875$, $\quad 5 + 2 + 5 + 2 + 1 + 8 + 7 + 5 = 35$.

Slično tome, imamo i ovo:

$45^2= 2025$, $\quad 20 + 25 = 45$;

$55^2= 3025$, $\quad 30 + 25 = 55$;

$297^2= 88209$, $\quad 88 + 209 =297$.

Evo nekoliko zanimljivih proizvoda:

$2 \cdot 819 = 9 \cdot 182$

$3 \cdot 728 = 8 \cdot 273$

$4 \cdot 217 = 7 \cdot 124$

$4 \cdot 427 = 7 \cdot 244$

$4 \cdot 637 = 7 \cdot 364$

$4 \cdot 847 = 7 \cdot 484$

$5 \cdot 546 = 6 \cdot 455$

Kao što vidite, u proizvodima sa desne strane jednakosti cifre idu obrnutim redom.

Pogledajte ove primjere:

$$1 + 2 = 3, \qquad 1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 = 6, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2.$$

Šta primjećujete? Zbir dva, tri, četiri i pet prvih članova iz prirodnog niza brojeva (1, 2, 3, 4, 5, 6, ….) jednak je redom 3, 6, 10 i 15, a zbir kubova tih istih brojeva jednak je kvadratu njihovog zbira! I uopšte: *zbir kubova uzastopnih prirodnih brojeva, počinjući od 1, jednak je kvadratu njihovog zbira.*

Međutim, francuski matematičar *Liuvil* (J. Liovill, 1809 – 1892) postavio je mnogo opštiji zadatak *da se nađu proizvoljni cijeli brojevi a, b, c, d, čiji će zbir kubova biti jednak kvadratu njihovog zbira, tj.*

$$a^3+b^3+c^3+\ldots = (a+b + c + \ldots)^2 \qquad (*)$$

Među brojevima *a, b, c, d,* može biti i jednakih.
Pronaći takve brojeve pogađanjem, bez određenog pravila, beznadežno je. Ako ne vjerujete, učinite nekoliko pokušaja, a onda čitajte dalje.

Liuvilu je uspjelo da dođe do vrlo zanimljivog rezultata, čija će vam suština biti jasna iz sljedeća dva primjera.

Primjer 1. - Uzmimo broj 6. On je djeljiv sa 1, 2, 3 i 6. A koliko djelilaca ima svaki od tih djelilaca? Broj 1 ima jedan djelilac, broj 2 – dva djelioca (to su 1 i 2), broj 3 – dva djelioca (1 i 3)i na kraju, broj 6 – četiri djelioca (1, 2, 3 i 6). Upravo ti brojevi 1, 2, 2 i 4 (tj. brojevi djelilaca) zadovoljavaju relaciju oblika (*), tj. imamo:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2 = 81.$$

Primjer 2. - Uzmimo broj 30. Njegovi djelioci su: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 30. Broj djelilaca za svaki od njih je redom: 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8. Imaćemo:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 +2^3 + 4^3 + 4^3+ 4^3+ 8^3 = (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 +8)^2$$

Kao što vidite, postupak je jednostavan i oštrouman. Primijenite ga sami i na druge brojeve.

Ljujić Nevena, JU OŠ „Dušan Korać”, Bijelo Polje

ZANIMLJIVI PODACI

1. Jednom se vodio ovakav porodični razgovor.

   MAJKA: Juče mi rekoše da je Damjan, sin Dijane Đurović, završio drugi razred, iako mu je tek sedam godina.

   OTAC: Bojim se da griješiš. Sin Dijane Đurović zove se Luka i tek mu je 5 godina.

   ĆERKA: Ja ne poznajem porodicu te Dijane Đurović, ali mi je nedavno drugarica pričala o njenom sinu i dobro se sjećam da je rekla da sin ima 10 godina, pri čemu je spomenula neko ime koje sigurno nije Damjan.

   GOST: Izvinite što se miješam, ali budući da dobro poznajem porodicu Đurović, moram vam reći da je svako od vas, kad se radi o imenu sina i njegovim godinama, izrekao jedno tačno i jedno netačno tvrđenje.

   Gost je bio u pravu. Kako se zove i koliko je star sin Dijane Đurović?

2. Jedna crkva ima dva različita zvona. Oba udaraju ravnomjerno. Udari prvog zvona čuju se svake četvrte sekunde, a udari drugog zvona čuju se svake treće sekunde. Istovremeni udari oba zvona čuju se kao jedan udar. Jednog dana oba zvona oglasila su se istovremeno. Neko je pažljivo brojao i izbrojao ukupno 20 udara zvona. Koliko vremena je proteklo od prvog do poslednjeg udara zvona?

3. U bašti su dva drveta, drvo A i drvo B. Ptice koje sjede na drvetu A kažu pticama sa drveta B da ako jedna od njih pređe na njihovo drvo, onda će na drvetu A biti dvostruko više ptica. Onda ptice sa drveta B kažu pticama sa drveta A da će na oba drveta biti podjednak broj ptica ukoliko jedna pređe kod njih. Koliko ima ptica na svakom drvetu?

4. Marko Kraljević se sprema na ljuti boj sa troglavom i trorepom aždajom. Vila Ravijojla daje Marku čudotvorni mač i kaže:

   – Jednim udarcem ovim mačem možeš odsjeći aždaji ili jednu glavu, ili dvije glave, ili jedan rep, ili dva repa. Zapamti: ako odsječeš glavu izrašće nova glava, ako odsječeš rep izrašće dva nova repa, ako odsječeš dva repa izrašće glava, ako odsječeš dvije glave neće ništa izrasti.

   Dokažite da Marko Kraljević sa devet udaraca mačem može da obezglavi i obezrepi strašnu aždaju.

Vanja Đurđić Kuzmanović, JU OŠ „Oktoih”, Podgorica

ŠTAMPANJE OVOG BROJA POMOGLI SU:

DOMEN d.o.o.
PODGORICA

BEMAX d.o.o.
PODGORICA

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO
CRNE GORE

ELEKTROPRIVREDA CRNE GORE
A.D. NIKŠIĆ

HVALA NAŠIM PRIJATELJIMA!

Jedan dio tiraža ovog broja će biti besplatno podijeljen učenicima osnovnih škola iz Nikšića, Plužina, Šavnika i Žabljaka.

Spisak nagrađenih učenika koji su rješavali Konkursne zadatke:

1. **Jovan Janković**, VII-4, JU OŠ „Maksim Gorki", Podgorica;
2. **Matea Šćekić**, VI-1, JU OŠ „Anto Đedović", Bar;
3. **Anđelija Đurković**, VI-1, JU OŠ „Anto Đedović", Bar;
4. **Srđan Lunić**, IX razred, JU OŠ „Anto Đedović", Bar;
5. **Luka Filipović**, VIII-1, JU OŠ „Radojica Perović", Podgorica.

Uredništvo poziva nastavnike, učenike i sve čitaoce da nam šalju priloge za list:
članke, odabrane zadatke, zanimljivosti, priloge za zabavnu matematiku itd.

Dio tiraža ovog broja „Dijagonale" će biti besplatno podijeljen svim bibliotekama osnovnih škola u Crnoj Gori.
Ovaj broj se može kupiti u „Gradskoj knjižari" i „Narodnoj knjizi".

Sve informacije o pretplati i porudžbini ovog i narednih brojeva možete naći na sajtu Udruženja. Narudžbe slati putem mejla.

Broj žiro računa UNMCG je **550-18240-71** kod Podgoričke banke.

Adresa redakcije je: Ul. Gojka Berkuljana br. 20, Podgorica.

Mejl: udruznastmatem@gmail.com

www.unmcgwordpress.com

CIP - Каталогизација у публикацији
Национална библиотека Црне Горе, Цетиње

ISSN 2536-5851 = Dijagonala
COBISS.CG-ID 36769808

ISSN 2536–5851

9 772536 585009 >